



Пензенский государственный университет

Методы идентификации и восстановления входных сигналов динамических систем
И.В. Бойков, Н.П. Кривулин

**МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

И.В. Бойков, Н.П. Кривулин

*Пензенский государственный университет, Пенза
i.v.boykov@gmail.com, krivulin@bk.ru*

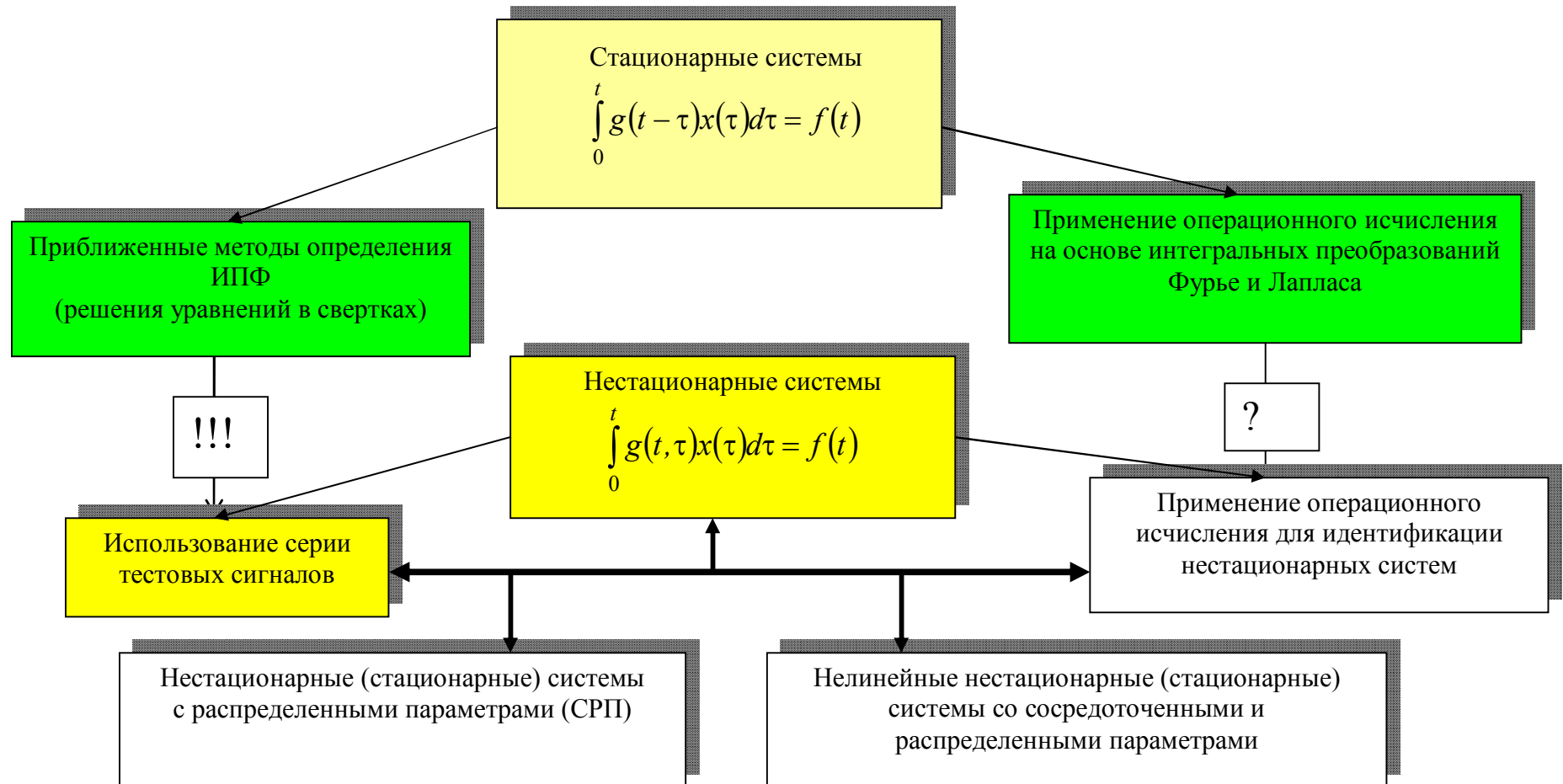
)

—

Общероссийский семинар
Информатика, управление и системный анализ, 18 февраля 2020 г.

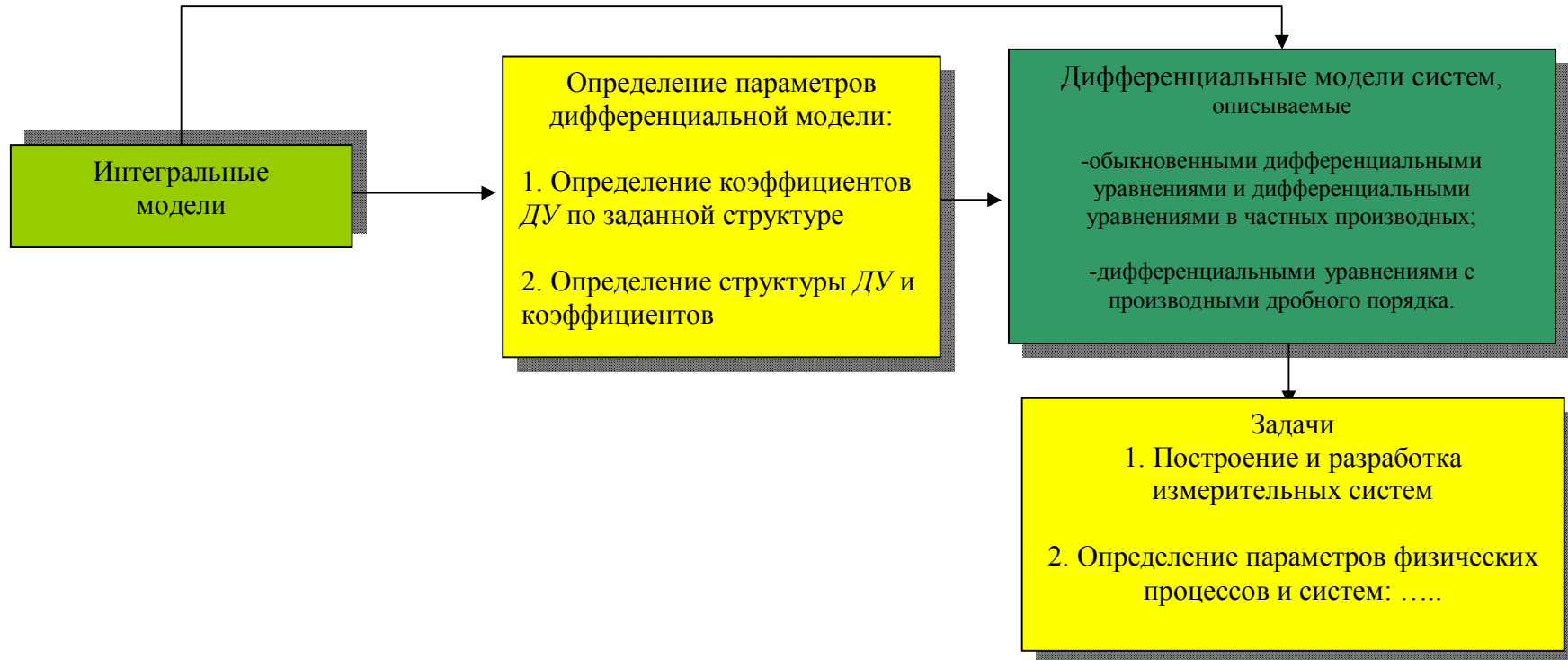


Постановка проблемы (интегральные модели)





Дифференциальные модели





Цель работы: Разработка новых и совершенствование существующих методов и алгоритмов идентификации систем с распределенными и сосредоточенными параметрами и их применение в измерительной технике для восстановления входных сигналов измерительных преобразователей.

Основные задачи:

- Разработать и исследовать методы восстановления импульсных переходных функций непрерывных нестационарных динамических систем (линейных и нелинейных) с распределенными параметрами.
- Разработать и исследовать методы восстановления импульсных переходных функций дискретных нестационарных динамических систем (линейных и нелинейных) с распределенными параметрами.
- Разработать и исследовать методы определения параметров непрерывных нестационарных динамических систем со сосредоточенными и распределенными параметрами и эрмитарных систем, математические модели которых, описываются
 - обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных;
 - дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка;
- Разработать и исследовать методы определения параметров дискретных и дискретно-непрерывных нестационарных динамических систем с распределенными параметрами.
- Разработать и исследовать математические модели восстановления динамических характеристик и входных сигналов информационно-измерительных систем (ИИС).



Математические модели динамических систем

I. Непрерывные системы (линейные системы)

1. Динамические системы со сосредоточенными параметрами

Дифференциальные модели модель

$$a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_0(t)y(t) = x(t)$$

с нулевыми начальными условиями.

Интегральные модели

$$\int_0^t g(t, \tau)x(\tau)d\tau = y(t)$$

2. Динамические системы с распределенными параметрами

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n a_{k,j}(t,x) \frac{\partial^{k+j} y(t,x)}{\partial t^k \partial x^j} = w(t,x)$$

с нулевыми начальными

$$\int_0^t \int_D G(t, \tau, x, \xi)w(\tau, \xi)d\xi d\tau = y(t,x)$$

3. Эредитарные системы, описываемые уравнениями с дробной производной

$$D_{0t}^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau, \text{ где } \alpha > 0, m-1 < \alpha \leq m.$$

Системы со сосредоточенными параметрами

Системы с распределенными параметрами

стационарные системы

нестационарные системы

$$\sum_{k=1}^n A_k D_{0t}^{\alpha_k} y(t) = x(t)$$

при начальных условиях

$$D_{0t}^{\alpha_k - j} y(t) = b_{kj}, k = 1, 2, \dots, n;$$

$$j = 1, 2, \dots, m_k; m_k = [\alpha_k] + 1.$$

$$D_{0t}^\alpha y - \lambda(t)y = x(t)$$

при начальных условиях

$$D_{0t}^{\alpha-l} y = b_l, l = 1, 2, \dots, m = [\alpha] + 1,$$

$$A \partial_{0t}^\alpha u(t, x) = B \partial_{0x}^\beta u(t, x) + w(t, x)$$

с начальными $\partial_{0t}^\alpha u(0, x) = a_k(x), k = 1, 2, \dots, m = [\alpha] + 1,$ и

краевыми $\partial_{0t}^\beta u(t, 0) = b_k(t), k = 1, 2, \dots, n = [\beta] + 1$ условиями.



II. Дискретные системы (линейные системы)

1. Динамические системы со сосредоточенными параметрами

Дифференциальные модели модель

$$a_n(k)y(k+n) + \dots + a_0(k)y(k) = x(k)$$

с нулевыми начальными условиями.

Интегральные модели

$$\sum_{l=0}^k g(k,l)x(l) = y(k)$$

2. Динамические системы с распределенными параметрами

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{i,j}(k,l)w(k+i,l+j) = y(k,l)$$

с нулевыми начальными и краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l G(k,l,i,j)w(i,j) = y(k,l)$$

III. Нелинейные системы (интегральные модели)

Системы со сосредоточенными параметрами

Системы с распределенными параметрами

Непрерывные системы

$$y(t) = \sum_{k=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k) x(\tau_1) \dots x(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k$$

$$y(t, x) = \sum_{k=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x, \xi) w(\tau_1, \xi) \dots w(\tau_k, \xi) d\xi d\tau_1 \dots d\tau_k$$

Дискретные системы

$$y(k) = \sum_{m=1}^N \sum_{l_1=0}^k \dots \sum_{l_m=0}^k g_m(k, l_1, \dots, l_m) x(l_1) \dots x(l_m)$$

$$y(k, l) = \sum_{m=1}^N \sum_{l_1=0}^k \dots \sum_{l_m=0}^l g_m(k, l_1, \dots, l_m, l, j) w(l_1, j) \dots w(l_m, j)$$

Условия физической реализуемости

1. Непрерывные системы: $g(t, \tau) = 0$ при $\tau > t$; $g(t, \tau, x, \xi) = 0$ при $\tau > t$ или $(x, \xi) \notin D$;
2. Дискретные системы: $g(k, l) = 0$ при $l > k$; $g(k, l, k_1, l_1, \dots, k_n, l_n) = 0$ при $l > k$ или $l_1 > k_1$ или ... или $l_n > k_n$



МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ

Методы операционного исчисления восстановления импульсной переходной функции (ИПФ)

Системы со сосредоточенными параметрами, описываемые уравнениями

$$\int_0^t g(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (1)$$

где $x(t)$, $f(t)$ - входной и выходной сигналы, соответственно; $g(t, \tau)$ - ИПФ, подлежащая восстановлению.

УТВЕРЖДЕНИЕ¹.

Рассмотрим оператор $K_\lambda[\varphi]$ действующий по формуле

$$K_\lambda[\varphi] = \int_0^{+\infty} k(\lambda, t)\varphi(t)dt = \Phi(\lambda). \quad (2)$$

Пусть функция $g(t, \tau)$ удовлетворяет условию:

$$\int_0^{+\infty} k(\lambda, t)g(t, \tau)dt = G(\lambda)k(q(\lambda), \tau), \quad (3)$$

где $G(\lambda)$, $q(\lambda)$ - некоторые функции.

Тогда преобразование (2) уравнения (1) имеет вид: $G(\lambda)X(q(\lambda)) = F(\lambda)$, (4)

где $X(\lambda)$, $F(\lambda)$ - преобразования (2) функций $x(t)$, $f(t)$.

¹ Эфрос А. М., Данилевский А. М. *Операционное исчисление и контурные интегралы.* Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1937.



Восстановление импульсной переходной функции по двум сигналам

Постановка задачи. Требуется определить *ИПФ* динамической системы (1) по серии двух линейно независимых тестовых входных сигналов $x_i(t)$, $i=1,2$, и наблюдением двух выходных сигналов $f_i(t)$, $i=1,2$, в предположении, что *ИПФ* удовлетворяет условию (3).

Решение. Для входных и соответствующих выходных сигналов, записывается система уравнений

$$\int_0^t g(t, \tau) x_i(\tau) d\tau = f_i(t), i = 1, 2. \quad (4)$$

При выполнении условий (3), интегральное преобразование (2) системы (4), приводит к системе алгебраических уравнений:

$$G(\lambda) X_i(q(\lambda)) = F_i(\lambda), i = 1, 2, \quad (5)$$

с неизвестными функциями $G(\lambda)$ и $q(\lambda)$. Решая систему (5) относительно этих функций, находим $G(\lambda)$ и $q(\lambda)$.

Функция $g(t, \tau)$ находится из решения интегрального уравнения

$$\int_0^{+\infty} k(\lambda, t) g(t, \tau) dt = G(\lambda) k(q(\lambda), \tau),$$

или в результате применения к (3) преобразования, которое является обратным для (2) (если оно известно).



Применение преобразований Лапласа, Фурье, Меллина, Хартли для систем, описываемых уравнением: $\int_0^t g(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t)$.

Преобразование	Соответствующий вид условия (3)	Соответствующее алгебраическое уравнение	Восстановление $g(t, \tau)$ обратным преобразованием
Лапласа $L[f] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$	$\int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t, \tau) dt = G(p)e^{-\tau q(p)},$ $k(p, t) = e^{-pt}.$	$G(p)X(q(p)) = F(p),$	$g(t, \tau) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} G(p)e^{-(\tau q(p)+pt)} dp,$
Фурье $F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} g(t, \tau) dt = G(\omega)e^{i\tau q(\omega)},$ $k(\omega, t) = e^{i\omega t}.$	$G(\omega)X(q(\omega)) = F(\omega),$	$g(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{i(\tau q(\omega)-\omega t)} d\omega$
Меллина $M[f] = \int_0^{+\infty} t^{s-1} f(t) dt$	$\int_0^{+\infty} t^{s-1} g(t, \tau) dt = G(s)\tau^{q(s)-1},$ $k(s, t) = t^{s-1}.$	$G(s)X(q(s)) = F(s),$	$g(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} G(s)\tau^{q(s)-1} t^{-s} ds$
Хартли $\Xi[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} cas(2\pi\lambda) f(t) dt,$ $cas(t) \equiv cos(t) + sin(t)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} cas(2\pi\lambda t) g(t, \tau) dt = G(\lambda)cas(2\pi q(\lambda)\tau),$ $k(\lambda, t) = cas(2\pi\lambda t).$	$G(\lambda)X(q(\lambda)) = F(\lambda),$	$g(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} cas(2\pi\lambda t) G(\lambda) cas(2\pi q(\lambda)\tau) d\lambda,$

Публикации

Бойков, И. В. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин. - Пенза : Изд-во ПГУ. 2016. - 398 с.

Бойков, И. В. Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. - 2012. - 8.- С. 3-14.



Восстановление *ИПФ* по серии из трех тестовых сигналов

Постановка задачи

Требуется, по серии тестовых входных сигналов:

$$x_1(t), \quad x_2(t) = \int_0^t x_1(v)dv, \quad x_3(t) = \int_t^\infty x_1(v)dv, \quad \text{где } A = \int_0^\infty x_1(v)dv = \text{const} \neq 0,$$

$$\text{(Сигнал } x_3(t) \text{ можно представить в виде } x_3(t) = A - \int_0^t x_1(v)dv),$$

определить импульсную переходную функцию $g(t, \tau)$ системы (1):

$$\int_0^t g(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

удовлетворяющую условию (3) (преобразование Лапласа):

$$L_t[g(t, \tau)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t, \tau)dt = \hat{G}(p)e^{-\tau q(p)}.$$



Восстановление импульсной переходной функции

$$\int_0^t g(t, \tau) x_i(\tau) d\tau = f_i(t), i = 1, 2, 3.$$

Изображения входных и выходных сигналов имеют вид:

$$X_1(p) = L_t[x_1(t)], X_2(p) = L_t[x_2(t)] = \frac{X_1(p)}{p}, X_3(p) = L_t[x_3(t)] = \frac{A - X_1(p)}{p}, F_1(p), F_2(p), F_3(p); \operatorname{Re} p > \sigma.$$

$$\begin{cases} \hat{G}(p)X_1(q(p)) = F_1(p), \\ \hat{G}(p)X_1(q(p)) = q(p)F_2(p), \\ \hat{G}(p)[A - X_1(q(p))] = q(p)F_3(p), \end{cases}$$

Система имеет аналитическое решение относительно искомым функций $\hat{G}(p)$ и $q(p)$:

$$q(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

$$\hat{G}(p) = \frac{F_1(p)(F_3(p) + F_2(p))}{A \cdot F_2(p)}.$$

$$g(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \hat{G}(p) e^{pt - \tau q(p)} dp, \quad \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t, \tau) dt = \hat{G}(p) e^{-\tau q(p)}.$$



Системы с распределенными параметрами, описываемые уравнениями

$$y(t, x_1, \dots, x_n) = \int_0^t \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} g(t, \tau, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n) \omega(\tau, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_n \dots d\xi_1 d\tau, \quad (6)$$

где функции $\omega(t, x_1, \dots, x_n)$, $y(t, x_1, \dots, x_n)$ - входной и выходной сигналы системы; $g(t, \tau, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n)$ - ИПФ

Утверждение метода

Пусть преобразование Лапласа ИПФ $g(t, \tau, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n)$ по переменным t, x_1, \dots, x_n удовлетворяет условию

$$G(p, \tau, p_1, \xi_1, \dots, p_n, \xi_n) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(t, \tau, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n) e^{-(p t + x_1 \xi_1 + \dots + p_n t_n)} dt dx_1 \dots dx_n = \hat{G}(p, p_1, \dots, p_n) e^{-(\tau q(p) + \xi_1 q_1(p_1) + \dots + \xi_n q_n(p_n))}, \quad (7)$$

где $\hat{G}(p, p_1, \dots, p_n), q(p), q_1(p_1), \dots, q_n(p_n)$ - функции аналитические в правых полуплоскостях плоскостей комплексных переменных p, p_1, \dots, p_n , удовлетворяющие неравенствам $\text{Re } p > \sigma$, $\text{Re } p_k > \sigma$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\sigma = \text{const}$.

Тогда многомерное преобразование Лапласа уравнения (6) по переменным t, x_1, \dots, x_n будет иметь вид

$$Y(p, p_1, \dots, p_n) = \hat{G}(p, p_1, \dots, p_n) W(q(p), q_1(p_1), \dots, q_n(p_n)),$$

где функции $W(p, p_1, \dots, p_n)$ и $Y(p, p_1, \dots, p_n)$ - изображения Лапласа функций $\omega(t, x_1, \dots, x_n)$ и $y(t, x_1, \dots, x_n)$, соответственно.



Восстановление импульсной переходной функции

Постановка задачи. Требуется по серии, состоящей из $n+1$ – го входных сигналов $\omega_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k=1, \dots, n+1$ и соответствующих выходных сигналов $y_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k=1, \dots, n+1$, определить *ИПФ* системы, описываемая уравнением

$$y(t, x_1, \dots, x_n) = \int_0^t \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} g(t, \tau, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n) \omega(\tau, \xi_1, \dots, \xi_n) d\tau d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad (8)$$

в предположении, что *ИПФ* $g(t, \tau, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n)$ удовлетворяет условию (7).

Решение. По данной серии входных $\omega_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k=1, \dots, n+1$ и соответствующих выходных $y_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k=1, \dots, n+1$, сигналов, запишем систему

$$y_k(t, x_1, \dots, x_n) = \int_0^t \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} g(t, \tau, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n) \omega_k(\tau, \xi_1, \dots, \xi_n) d\tau d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad k = 1, 2, \dots, n+1. \quad (9)$$

Применяя преобразование Лапласа к системе (9), приходим к системе алгебраических уравнений

$$Y_k(p, p_1, \dots, p_n) = \hat{G}(p, p_1, \dots, p_n) W_k(q(p), q_1(p_1), \dots, q_n(p_n)), \quad k = 1, 2, \dots, n+1, \quad (10)$$

с искомыми функциями $\hat{G}(p)$, $q_1(p)$, ..., $q_n(p)$, которые определяются в результате решения системы (10).

Бойков, И. В. Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. -- 2012. -- 8. -- С. 3--14.



Методы идентификации нестационарных систем по серии специально подобранных входных сигналов

Постановка задачи: Требуется, зная значения $N + 1$ входного $x_k(t)$ и выходного $f_k(t)$ ($k = 1, \dots, N + 1$) сигналов в промежутке времени $[0, T]$, определить импульсную переходную функцию $g(t, \tau)$ ($g(t, \tau) = 0$ при $\tau > t$).

$$\int_0^t g(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11)$$

где $x(t)$ – входной, $f(t)$ – выходной сигналы.

Решение.

Используемые входные сигналы для идентификации:

1. Ступенчатые сигналы вида

$$x_k(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_k, \\ 0, & t_k < t \leq T, \end{cases} \quad t_k = \frac{Tk}{2(N+1)}, \quad k = 1, \dots, N+1.$$

Выходные сигналы имеют вид: $f_k(t) = \int_0^{t_k} g(t, \tau)d\tau; k = 1, \dots, N+1.$

Приближенное представление ИПФ $g(t, \tau)$ определяется в виде $g(t, \tau) \approx g_N(t, \tau) \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \alpha_{kl} \varphi_k(t) \varphi_l(\tau).$ (12)

Разложив выходной сигнал $f_k(t)$ в ряд по функциям $\varphi_k(t): f_m(t) \approx \sum_{k=0}^N f_k^m \varphi_k(t), m = 1, \dots, N+1,$

приходим к $N+1$ системе, каждая из которых состоит из $N+1$ уравнения, относительно искомым коэффициентов $\alpha_{k,l}, k, l=0, 1, \dots, N$ в разложении ИПФ (12):

$$\sum_{k=0}^N \left(\sum_{l=0}^N \alpha_{kl} \int_0^{t_m} \varphi_l(\tau)d\tau - f_k^m \right) \varphi_k(t) = 0, \quad m = 1, \dots, N+1.$$



2. Ступенчатые сигналы вида

$$x_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq t \leq t_{k+1} - h, \\ 1, & \text{при } t_{k+1} - h < t \leq T, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \text{ где } h = \frac{T}{2N}, t_k = \frac{Tk}{N}, k = 0, 1, \dots, N. \quad (13)$$

Выходные сигналы в узлах $t_m = \frac{Tm}{N}$, $m = 0, 1, \dots, N$, принимают вид

$$\int_0^{t_m} g(t_m, \tau) x_k(\tau) d\tau = f_k(t_m). \quad (14)$$

Аппроксимируя интеграл (14) конечной суммой по узлам $t_m = \frac{Tm}{N}$, $m = 0, 1, \dots, N$, приближенные значения импульсной переходной функции $g(t_k, t_l)$, $k = 0, 1, \dots, N$, $l = 0, 1, \dots, k$, определяются последовательно

рассматривались квадратурные формулы прямоугольников и Симпсона по узлам $t_m = \frac{Tm}{N}$, $m = 0, 1, \dots, N$.



3. Серия линейно независимых сигналов $x_m(t)$, $m = 0, 1, \dots, N$, (выходные сигналы $f_m(t)$, $m = 0, 1, \dots, N$).

$$\int_0^t g(t, \tau) x_m(\tau) d\tau = f_m(t), 0 \leq t \leq T, m = 0, 1, \dots, N. \quad (15)$$

Аппроксимируя интеграл в левой части формулы (15) конечной суммой по узлам $t_k = (k+1)T/(N+1)$, $k = 0, 1, \dots, N$, и при каждом фиксированном значении l приближенные значения импульсной переходной функции $g(t, \tau)$ в узлах (t_l, t_k) , $l = 0, 1, \dots, N$, $k = 0, 1, \dots, l$, определяем из решения систем линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^l g(t_l, t_k) x_m(t_k) \Delta t = f_m(t_l), m = 0, \dots, l, \Delta t = t_{k+1} - t_k, l = 0, \dots, N.$$

В качестве входных сигналов использовались

$$x_m(t), m = 0, 1, \dots, N : 1, t, t^2, \dots, t^N;$$

$$x_m(t), m = 0, 1, \dots, N : \sin(t), \sin(2t), \dots, \sin(Nt);$$

$$x_m(t), m = 0, 1, \dots, N : 1, \cos(t), \cos(2t), \dots, \cos(Nt);$$

Публикации

Бойков, И. В. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин. -- Пенза : Изд-во ПГУ. 2016. --398 с.

Бойков, И. В. Определение динамических характеристик измерительных преобразователей с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. -- 2000. -- 9. -- С. 20--22. Boikov I.V., Krivulin N.P. Determination of the Dynamic Characteristics of Measuring Transducers with Distributed Parameters // Measurement Techniques. 2000. V. 43. No. 9. P. 752--756.

Общероссийский семинар

Информатика, управление и системный анализ, 18 февраля 2020 г.



ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Метод виртуальных сигналов (МВС) при параметрической идентификации нестационарных

Системы со сосредоточенными параметрами модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами:

$$a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) y(t) = x(t), \quad (16)$$

где $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ - неизвестные коэффициенты, $x(t)$, $y(t)$ - входной и выходной сигналы соответственно.

Задача идентификации заключается в определении коэффициентов $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$.

Для системы линейно независимых функций $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n+1$ - виртуальные выходные сигналы, определяется система функций $x_k(t)$, $k = 1, \dots, n+1$, являющихся решениями интегральных уравнений

$$\int_0^t g(t, \tau) x_k(\tau) d\tau = \varphi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n+1,$$

где $g(t, \tau)$ - импульсная переходная функция динамической системы (16), функции $x_k(t)$, $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, выступают в качестве виртуальных входных и выходных сигналов.



Искомые коэффициенты $a_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, определяются из решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_n(t)\varphi_1^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\varphi_1^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)\varphi_1(t) = x_1(t); \\ a_n(t)\varphi_2^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\varphi_2^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)\varphi_2(t) = x_2(t); \\ \dots \\ a_n(t)\varphi_{n+1}^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\varphi_{n+1}^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)\varphi_{n+1}(t) = x_{n+1}(t). \end{cases}$$

При виртуальных выходных сигналах:

$$\varphi_1(t) = 1(t), \varphi_2(t) = t, \dots, \varphi_{n+1}(t) = t^n,$$

коэффициенты определяются последовательно, по формулам:

$$a_0(t) = x_1(t); a_1(t) = x_2(t) - a_0(t)t; \dots; a_n(t) = \frac{1}{n!} (x_{n+1}(t) - n(n-1) \cdot \dots \cdot 2a_{n-1}(t)t - \dots - a_0(t)t^n).$$

Публикации

Бойков, И. В. Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. -- 2013. -- 4. -- С. 6--11. Boikov I. V., Krivulin N. P. Recovery of the parameters of linear systems described by differential equations with variable coefficients // Measurement Techniques. 2013. V. 56. No. 4. P. 359--367.



Системы с распределенными параметрами модели, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных

$$\sum_{k=1}^n a_k(x,t) \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} + \sum_{k=1}^m b_k(x,t) \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} + c_0(x)u(x,t) = f(x,t), \quad (17)$$

$$x < \infty, t \geq 0,$$

с начальными условиями $u(0,x) = 0, \frac{\partial^k u(0,x)}{\partial t^k} = 0, k = 1, 2, \dots, n-1$, и краевыми условиями $u(t,0) = 0, \frac{\partial^k u(t,0)}{\partial x^k} = 0, k = 1, 2, \dots, m-1$,

где $f(t,x), u(t,x)$ - входной и выходной сигналы системы соответственно; t - переменная времени, x - пространственная координата;

$a_k(t), k = 1, 2, \dots, n; b_k(t), k = 1, 2, \dots, m; c_0(t)$ - коэффициенты, подлежащие определению.

Например, для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$a(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + b(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \quad (18)$$

с начальными условиями $u(x,0) = 0$ и граничными $u(0,t) = u(l,t) = 0$ условиями.

Здесь $u(x,t)$ - выходной сигнал системы, $f(x,t)$ - входной сигнал.

Для виртуальных линейно независимых сигналов $\hat{u}_1(x,t)$ и $\hat{u}_2(x,t)$, определяются входные сигналы $\hat{f}_1(x,t)$ и $\hat{f}_2(x,t)$

$$\hat{u}_i(x,t) = \iint_{00}^{tx} G(t,\tau,x,\xi) \hat{f}_i(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad i = 1, 2,$$

где $G(t,\tau,x,\xi)$ - известная *ИПФ* динамической системы, которая является функцией Грина для уравнения (18).



Параметры $a(x,t)$, $b(x,t)$ определяются из системы

$$\begin{cases} a(x,t) \frac{\partial \hat{u}_1(x,t)}{\partial t} + b(x,t) \frac{\partial^2 \hat{u}_1(x,t)}{\partial x^2} = \hat{f}_1(x,t), \\ a(x,t) \frac{\partial \hat{u}_2(x,t)}{\partial t} + b(x,t) \frac{\partial^2 \hat{u}_2(x,t)}{\partial x^2} = \hat{f}_2(x,t). \end{cases}$$

В частности, если $\hat{u}_1(x,t) = t$ и $\hat{u}_2(x,t) = x^2$, то коэффициенты определяются в виде $a(x,t) = \hat{f}_1(x,t)$, $b(x,t) = \frac{1}{2} \hat{f}_2(x,t)$.

В случае уравнения (17), система принимает вид

$$\sum_{k=1}^n a_k(x,t) \frac{\partial^k \hat{u}_j(x,t)}{\partial t^k} + \sum_{k=1}^m b_k(x,t) \frac{\partial^k \hat{u}_j(x,t)}{\partial x^k} + c_0(x) \hat{u}_j(x,t) = \hat{f}_j(x,t), \quad j = 1, 2, \dots, m+n+1,$$

Соответствия между виртуальными входными $\hat{f}_j(x,t)$, $j = 1, 2, \dots, m+n+1$, и выходными $\hat{u}_j(x,t)$, $j = 1, 2, \dots, m+n+1$, определяются уравнениями:

$$u_i(\hat{x}, t) = \int_0^t \int_0^x G(t, \tau, x, \xi) \hat{f}_i(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, m+n+1.$$

Публикации

Бойков, И. В. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин. - Пенза : Изд-во ПГУ. 2016. - 398 с.

Бойков, И. В. Параметрическая идентификация линейных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. - 2014. - № 7. - С. 13-24.

Кривулин, Н. П. Определение параметров физических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами / Н. П. Кривулин // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. VIII Междунар. науч.-техн. конф., 26-30 мая 2014 г. - Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. - С. 172-178.



Параметрическая идентификация эрдитарных линейных динамических систем

Системы со сосредоточенными параметрами модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с дробной производной:

$$\sum_{k=1}^n A_k D_{0t}^{\alpha_k} y(t) = x(t) \quad (19)$$

и с начальными условиями $D_{0t}^{\alpha_k - j} y(t) = b_{kj}, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m_k; m_k = [\alpha_k] + 1.$ (20)

Здесь $D_{0t}^{\alpha_k} y(t) = \frac{1}{\Gamma(m_k - \alpha_k)} \frac{d^{m_k}}{dt^{m_k}} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha_k - m_k + 1}} d\tau, k = 1, 2, \dots, n,$ где $\alpha_k > 0, m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k, A_k \in R, k = 1, 2, \dots, n.$

Метод основан на применении преобразования Лапласа к задаче Коши (19), (20), что приводит к уравнению

$$Y(p) \sum_{k=1}^n A_k p^{\alpha_k} - \sum_{k=1}^n A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1} = X(p).$$

Значения искоемых параметров системы $A_1, A_2, \dots, A_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ определяются методом наименьших квадратов и методом коллокации из условия минимума функционала

$$F(A_1, \dots, A_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left[X(p) - Y(p) \sum_{k=1}^n A_k p^{\alpha_k} - \sum_{k=1}^n A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1} \right]^2 \rightarrow \min.$$



Метод наименьших квадратов по узлам $t_i = a + \frac{b-a}{N}i, i=1,2,\dots,N$, приводит к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_n \sum_{i=1}^N \varphi_n^2(t_i) + B_{n-1} \sum_{i=1}^N \varphi_{n-1}(t_i)\varphi_n(t_i) + \dots + B_1 \sum_{i=1}^N \varphi_1(t_i)\varphi_n(t_i) = \sum_{i=1}^N \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} \varphi_n(t_i) \\ B_n \sum_{i=1}^N \varphi_n(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) + B_{n-1} \sum_{i=1}^N \varphi_{n-1}^2(t_i) + \dots + B_1 \sum_{i=1}^N \varphi_1(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) = \sum_{i=1}^N \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} \varphi_{n-1}(t_i) \\ \dots \\ B_n \sum_{i=1}^N \varphi_n(t_i)\varphi_1(t_i) + B_{n-1} \sum_{i=1}^N \varphi_{n-1}(t_i)\varphi_1(t_i) + \dots + B_1 \sum_{i=1}^N \varphi_1^2(t_i) = \sum_{i=1}^N \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} \varphi_1(t_i) \\ B_n \sum_{i=1}^N \varphi_n(t_i)t_i^{\beta_1} \ln t_i + B_{n-1} \sum_{i=1}^N \varphi_{n-1}(t_i)t_i^{\beta_1} \ln t_i + \dots + B_1 \sum_{i=1}^N \varphi_1(t_i)t_i^{\beta_1} \ln t_i = \sum_{i=1}^N \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} t_i^{\beta_1} \ln t_i \\ B_n \sum_{i=1}^N \varphi_n(t_i)t_i^{\beta_2} \ln t_i + B_{n-1} \sum_{i=1}^N \varphi_{n-1}(t_i)t_i^{\beta_2} \ln t_i + \dots + B_1 \sum_{i=1}^N \varphi_1(t_i)t_i^{\beta_2} \ln t_i = \sum_{i=1}^N \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} t_i^{\beta_2} \ln t_i \\ \dots \\ B_n \sum_{i=1}^N \varphi_n(t_i)t_i^{\beta_n} \ln t_i + B_{n-1} \sum_{i=1}^N \varphi_{n-1}(t_i)t_i^{\beta_n} \ln t_i + \dots + B_1 \sum_{i=1}^N \varphi_1(t_i)t_i^{\beta_n} \ln t_i = \sum_{i=1}^N \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} t_i^{\beta_n} \ln t_i \end{array} \right.$$

Здесь $\varphi_k(t_i) = t_i^{\beta_k} - \frac{\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{j-1}}{Y(t_i)}$, $k=1,2,\dots,n$. $B_1, B_2, \dots, B_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ - оценки искоемых параметров $A_1, A_2, \dots, A_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

Исследованы частные случаи

1. Нулевые начальные условия $b_{kj} = 0, k=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m_k; m_k = [\alpha_k] + 1$. $A_1, A_2, \dots, A_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - искоемые параметры.
2. Известны параметрры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - порядки дробных производных. A_1, A_2, \dots, A_n - искоемые параметры.
3. Известны параметрры A_1, A_2, \dots, A_n , -коэффициенты уравния. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - искоемые параметры.

Публикации

Бойков, И. В. Параметрическая идентификация систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. - 2013. - № 9. - С. 3-17.

Общероссийский семинар

Информатика, управление и системный анализ, 18 февраля 2020 г.



Системы с распределенными параметрами модели, описываемые дифференциальными уравнениями с частными производными дробного порядка

$$A\partial_{ot}^\alpha u(t, x) = B\partial_{ox}^\beta u(t, x) + w(t, x) \quad (21)$$

с начальными $\partial_{ot}^\alpha u(0, x) = a_k(x), k = 1, 2, \dots, m = [\alpha] + 1$, и краевыми $\partial_{ox}^\beta u(t, 0) = b_k(t), k = 1, 2, \dots, n = [\beta] + 1$ условиями. (22)

Применив преобразование Лапласа к уравнению (21) с начальными и краевыми условиями (22) по переменным t, x , в предположении, что $U(p_1, p_2) \neq 0$, получим

$$Ap_1^\alpha - Bp_2^\beta = \frac{A(p_1^{m-1}a_1(p_2) + \dots + a_m(p_2)) - B(p_2^{n-1}b_1(p_1) + \dots + b_n(p_1))}{U(p_1, p_2)} + \frac{G(p_1, p_2)}{U(p_1, p_2)}. \quad (23)$$

Введем сетку узлов $(t_i, \tau_j) \in D$:

$$\begin{cases} t_i = a + \frac{b-a}{M}i, i = 1, 2, \dots, M, \\ \tau_j = c + \frac{d-c}{N}j, j = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

В области D для выражения (4) введем функционал

$$\Phi(A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left(A_1 t_i^{\alpha_1} - B_1 \tau_j^{\beta_1} - \frac{A_1 (t_i^{m-1} a_1(\tau_j) + \dots + a_m(\tau_j)) - B_1 (\tau_j^{n-1} b_1(t_i) + \dots + b_n(t_i))}{U(t_i, \tau_j)} - \frac{G(t_i, \tau_j)}{U(t_i, \tau_j)} \right)^2.$$



Параметры $A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1$ находятся методом наименьших квадратов из условия минимума функционала

$$\Phi(A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1) \rightarrow \min.$$

Из необходимого условия минимума функционала имеем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_1^2(t_i, \tau_j) - B_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_2(t_i, \tau_j) \varphi_1(t_i, \tau_j) - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{G(t_i, \tau_j)}{U(t_i, \tau_j)} \varphi_1(t_i, \tau_j) = 0, \\ A_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_1(t_i, \tau_j) \varphi_2(t_i, \tau_j) - B_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_2^2(t_i, \tau_j) - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{G(t_i, \tau_j)}{U(t_i, \tau_j)} \varphi_2(t_i, \tau_j) = 0, \\ A_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_1(t_i, \tau_j) t_i^{\alpha_1} \ln(t_i) - B_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_2(t_i, \tau_j) t_i^{\alpha_1} \ln(t_i) - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{G(t_i, \tau_j)}{U(t_i, \tau_j)} t_i^{\alpha_1} \ln(t_i) = 0, \\ A_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_1(t_i, \tau_j) t_i^{\beta_1} \ln(\tau_i) - B_1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_2(t_i, \tau_j) t_i^{\beta_1} \ln(\tau_i) - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{G(t_i, \tau_j)}{U(t_i, \tau_j)} t_i^{\beta_1} \ln(\tau_i) = 0, \end{array} \right.$$

$$\text{где } \varphi_1(t, \tau) = t^{\alpha_1} - \frac{t^{m-1} a_1(\tau) + \dots + a_m(\tau)}{U(t, \tau)}, \varphi_2(t, \tau) = t^{\beta_1} - \frac{\tau^{n-1} b_1(t) + \dots + b_n(t)}{U(t, \tau)}.$$

Публикации:

Бойков, И. В. Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. - 2013. - № 2 (26). - С. 120-129.



Параметрическая идентификация эргодических динамических систем с переменными параметрами, математические модели которых описываются уравнениями

$$D_{0t}^{\alpha} y - \lambda(t)y = x(t) \quad (24)$$

$$\text{при начальных условиях } D_{0t}^{\alpha-l} y = b_l, l = 1, 2, \dots, m = [\alpha] + 1, \quad (25)$$

где $\alpha > 0, m - 1 < \alpha \leq m \in R$, $\lambda(t)$ - непрерывная функция, являются параметрами системы.

Приближенное представление функции $\lambda(t)$ ищется в виде многочлена: $\lambda_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-kt}$.

Уравнение (24) аппроксимируется следующим

$$D_{0t}^{\alpha} y(t) - \sum_{k=0}^n a_k e^{-kt} y(t) = x(t) \quad (26)$$

с неизвестными параметрами $\alpha, a_k, k = 0, 1, \dots, n$, определение которых основано на применении преобразования Лапласа к уравнению (26) с начальными условиями (25). В результате чего имеем

$$(p^{\alpha} - a_0)Y(p) - \sum_{k=1}^n a_k Y(p+k) = X(p) + \sum_{l=1}^m b_l p^{l-1}.$$

Значения искоемых параметров $\alpha, a_k, k = 0, 1, \dots, n$ определяются методом коллокаций и методом наименьших квадратов.

Публикации

Бойков, И. В. Идентификация динамических систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами дробного порядка / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань, 20-24 августа 2015 г.) - Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 499-501.



ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Особенности применения Z -преобразования восстановления динамических характеристик

Дискретные системы со сосредоточенными параметрами, описываемые уравнениями

$$y(k) = \sum_{l=0}^k g(k,l)x(l), k = 0,1,2,\dots, \quad (27)$$

где $x(l)$, $l = 0,1,2,\dots$; $y(k)$, $k = 0,1,2,\dots$, - входной и выходной сигнал; $g(k,l)$, $k,l = 0,1,\dots$ - импульсный отклик.

Утверждение. Пусть выполнено следующее условие:

Z -преобразование $\{g(k,l)\}$ по переменной k имеет вид

$$Z[g(k,l)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k,l)z^{-k} = \hat{G}(z)[q(z)]^{-l}, l = 0,1,\dots, \quad (28)$$

где $\hat{G}(z)$, $q(z)$ - некоторые аналитические функции.

Тогда Z -преобразование уравнения (27) имеет вид

$$Y(z) = \hat{G}(z)X(q(z)), \quad (29)$$

где $X(z)$ и $Y(z)$ Z -преобразования $\{x(k)\}$, $\{y(k)\}$, $k = 0,1,\dots$



Восстановление *ИПФ* по двум сигналам системы (27).

Постановка задачи. Требуется по серии двух тестовых входных $x_j(k)$, $j = 1, 2$, сигналов и соответствующих выходных сигналов $y_j(k)$, $j = 1, 2$, определить $g(k, l)$ - *ИПФ* при выполнении условия (28) системы (27).

Решение. Восстановление функции $g(k, l)$ проводится по результатам испытаний, состоящим из серии из двух тестовых входных $x_i(k)$, и выходных $y_i(k)$, $i = 1, 2$; $k = 0, 1, \dots$ сигналов, по которым строится система уравнений:

$$y_i(k) = \sum_{l=0}^{\infty} g(k, l)x_i(l), k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2. \quad (30)$$

при условии (28). Преобразование Лапласа приводит к системе алгебраических уравнений относительно функций $\hat{G}(z), q(z)$:

$$\hat{G}(z)X_i(q(z)) = Y_i(z), i = 1, 2.$$

Решая эту систему, находим $\hat{G}(z), q(z)$. Z -преобразование функции $g(k, l)$ будет иметь вид $G(z, l) = \hat{G}(z)[q(z)]^{-l}$.



Восстановление ИПФ по трем сигналам системы (27)

Постановка задачи

Требуется, по серии тестовых входных сигналов:

$$x_1(k), x_2(k) = \sum_{l=0}^k x_1(l), x_3(k) = \sum_{l=k}^{+\infty} x_1(l), \quad A = \sum_{l=0}^{+\infty} x_1(l) = \text{const} \neq 0.$$

(сигнал $x_3(t)$ имеет вид в виде

$$x_3(k) = A - x_2(k)),$$

определить импульсную переходную функцию $g(k,l)$ системы (27),

$$y(k) = \sum_{l=0}^k g(k,l)x(l), k = 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющую условию (28)

$$Z[g(k,l)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k,l)z^{-k} = \hat{G}(z)[q(z)]^{-l}, l = 0, 1, \dots,$$



Восстановление импульсной переходной функции

Z-преобразование входных сигналов имеют вид:

$$X_1(z) = Z_k[x_1(k)], \quad X_2(z) = Z_k[x_2(k)] = \frac{z}{z-1} X_1(z), \quad X_3(z) = Z_k[x_3(k)] = \frac{z}{z-1} (A - X_1(z)).$$

В результате приходим к системе алгебраических уравнений относительно $\hat{G}(z)$ и $q(z)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{G}(z)X_1(q(z)) = F_1(z), \\ \hat{G}(z)X_1(q(z)) = \frac{q(z)-1}{q(z)} F_2(z), \\ \hat{G}(z)A - \hat{G}(z)X_1(q(z)) = \frac{q(z)-1}{q(z)} F_3(z) \end{array} \right.$$

Система имеет аналитическое решение относительно искомых функций $\hat{G}(z)$ и $q(z)$:

$$q(z) = \frac{F_2(z)}{F_2(z) - F_1(z)},$$

$$\hat{G}(z) = \frac{F_1(z)(F_3(z) + F_2(z))}{A \cdot F_2(z)}.$$



Дискретные системы с распределенными параметрами, описываемые уравнениями

$$y(k_1, \dots, k_n) = \sum_{m_1=0}^{k_1} \dots \sum_{m_n=0}^{k_n} g(k_1, m_1, \dots, k_n, m_n) x(m_1, \dots, m_n), \quad k_1, \dots, k_n = 0, 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где $x(k_1, \dots, k_n), y(k_1, \dots, k_n)$ - входной и выходной сигналы системы;

$g(k_1, m_1, \dots, k_n, m_n), k_1, \dots, k_n = 0, 1, 2, \dots; m_1, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots$ - импульсная переходная функция.

Утверждения.

Пусть для импульсной переходной функции $g(k_1, m_1, \dots, k_n, m_n)$ Z -преобразование по переменным k_1, \dots, k_n удовлетворяет условию

$$G(z_1, \dots, z_n, m_1, \dots, m_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} g(k_1, m_1, \dots, k_n, m_n) z_1^{-k_1} \dots z_n^{-k_n} = \hat{G}(z_1, \dots, z_n) [q_1(z_1)]^{-m_1} \dots [q_n(z_n)]^{-m_n}, \quad m_1, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots, \quad (32)$$

где $\hat{G}(z_1, \dots, z_n), q_1(z_1), \dots, q_n(z_n)$ - функции аналитические в некоторой области Ω .

Тогда Z -преобразование уравнения

$$y(k_1, \dots, k_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} g(k_1, m_1, \dots, k_n, m_n) x(m_1, \dots, m_n), \quad k_1, \dots, k_n = 0, 1, 2, \dots,$$

будет иметь вид

$$Y(z_1, \dots, z_n) = \hat{G}(z_1, \dots, z_n) X(q_1(z_1), \dots, q_n(z_n)),$$

где функции $Y(z_1, \dots, z_n), X(z_1, \dots, z_n)$ - Z -преобразования последовательностей $y(k_1, \dots, k_n)$, и $x(k_1, \dots, k_n)$, $k_1, \dots, k_n = 0, 1, 2, \dots$



Восстановление ИПФ системы (31).

Постановка задачи. Требуется по серии $n+1$ тестового входного $x_k(k_1, \dots, k_n), k = 1, 2, \dots, n+1$ сигналов и соответствующих выходных сигналов $y_k(k_1, \dots, k_n), k = 1, 2, \dots, n+1$, определить $g(k_1, m_1, \dots, k_n, m_n)$ - ИПФ при выполнении условия (32) системы

$$y(k_1, \dots, k_n) = \sum_{m_1=0}^{k_1} \dots \sum_{m_n=0}^{k_n} g(k_1, m_1, \dots, k_n, m_n) x(m_1, \dots, m_n), \quad k_1, \dots, k_n = 0, 1, 2, \dots,$$

Решение. Для входных $x_k(k_1, \dots, k_n), k = 1, 2, \dots, n+1$, и выходных $y_k(k_1, \dots, k_n), k = 1, 2, \dots, n+1$, сигналов записывается система:

$$y_j(k_1, \dots, k_n) = \sum_{m_1=0}^{k_1} \dots \sum_{m_n=0}^{k_n} g(k_1, m_1, \dots, k_n, m_n) x_j(m_1, \dots, m_n), \quad j = 1, 2, \dots, n+1.$$

$$Y_j(z_1, \dots, z_n) = \hat{G}(z_1, \dots, z_n) X_j(q_1(z_1), \dots, q_n(z_n)), \quad j = 1, 2, \dots, n+1.$$

$$G(z_1, \dots, z_n, m_1, \dots, m_n) = \hat{G}(z_1, \dots, z_n) [q_1(z_1)]^{-m_1} \dots [q_n(z_n)]^{-m_n},$$



ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Метод виртуальных сигналов при параметрической идентификация дискретных систем

Системы со сосредоточенными параметрами, математические модели которых описываются разностными уравнениями вида

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \dots + a_0(k)y(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (31)$$

с нулевыми начальными условиями $y(0) = 0, y(1) = 0, \dots, y(n-1) = 0$,

где $x(k), k = 0, 1, 2, \dots$, - входной сигнал; $y(k), k = 0, 1, 2, \dots$, - выходной сигнал системы;

$a_0(k), a_1(k), \dots, a_n(k), k = 0, 1, 2, \dots$, - коэффициенты разностного уравнения, которые являются параметрами системы.

Метод определения параметров системы заключается в следующем.

Уравнению (31) ставится в соответствие эквивалентное разностное уравнение

$$b_n(k)\Delta^n y(k) + b_{n-1}(k)\Delta^{n-1} y(k) + \dots + b_0(k)y(k) = x(k) \quad (32)$$

с нулевыми начальными условиями, где $\Delta^n y(k)$ - разность n -го порядка.

Определение коэффициентов $a_0(k), \dots, a_n(k)$, уравнения (31) сводится к определению коэффициентов $b_0(k), \dots, b_n(k)$.



Определение коэффициентов $b_0(k), \dots, b_n(k)$, $k = 0, 1, \dots$, в предположении, что известна импульсная переходная функция $g(k, l)$ заключается в том, что определяются виртуальные входные $x_i(k)$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, n+1$ сигналы такие, чтобы им соответствовали выходные сигналы $y_i(k) = k^{(i-1)}$, $i = 1, \dots, n+1$ - обобщенные степенные функции, которые удовлетворяют условиям $\Delta k^{(n)} = nk^{(n-1)}$, $\Delta^2 k^{(n)} = n(n-1)k^{(n-2)}$, ... $\Delta^n k^{(n)} = n!k^{(0)} = n!1(k)$, $\Delta^{n+1} k^{(n)} = 0$, при $k > 0$.

Используя импульсную переходную функцию $g(k, l)$, представим каждый из выходных сигналов системы (32) в виде соответствующего уравнения:

$$y_m(k) = \sum_{l=0}^k g(k, l)x_m(l), \quad m = 1, \dots, n+1. \quad (33)$$

Из решения уравнений (33) ($g(k, l) \neq 0$ при $k = l$) получим последовательности виртуальных входных сигналов $x_m(k)$, $k = 0, 1, \dots$, $m = 1, \dots, n+1$, для каждой заданной последовательности выходных сигналов $y_m(k)$.

Располагая значениями $x_m(k)$, $m = 1, 2, \dots, n+1$, $k = 0, 1, \dots$, находим

$$\begin{aligned} b_0(k) &= x_1(k), \\ b_i(k) &= \frac{1}{i} \left(x_{n+1}(k) - i(i-1) \dots 2b_{i-1}(k)k^{(1)} - \dots - b_1(k)k^{(i-1)} - b_0(k)k^{(i)} \right), \\ & \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

По значениям коэффициентов $b_i(k)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots$ определяются искомые коэффициенты $a_i(k)$, $i = 0, 1, \dots, n$,



Системы с распределенными параметрами, математические модели которых описываются разностными уравнениями вида

$$\sum_{i=1}^n a_i(k)u(k+i, l) + \sum_{j=1}^m b_j(k)u(k, l+j) + c_0(k)u(k, l) = f(k, l), k, l = 0, 1, 2, \dots$$

с начальными условиями $u(0, l) = 0$, $u(i, l) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$; $l = 0, 1, 2, \dots$

и краевыми условиями $u(k, 0) = 0$, $u(k, j) = 0$, $j = 1, \dots, m-1$; $k = 0, 1, \dots$

Здесь входной и выходной сигналы $f(k, l)$ и $u(k, l)$, $k, l = 0, 1, 2, \dots$;

$a_i(k)$, $b_j(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$; $c_0(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ -- коэффициенты, которые являются параметрами системы.

Бойков, И. В. Восстановление входных сигналов дискретных динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. -- 2017. -- 11. -- С. 3--7. Boikov I. V., Krivulin N. P. Recovering the Input Signals of Discrete Dynamical Systems // Measurement Techniques. 2018. V. 60. No. 11. P.

Бойков, И. В. Идентификация дискретных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. -- 2014. -- 2 (30). -- С. 34--49.

Бойков, И. В. Идентификация дискретно-непрерывных систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Международная конференция по математической теории управления и механике. 2 - 7 июля 2015г. Суздаль, 2015. С. 41 - 42.



ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методы операционного исчисления при идентификация нелинейных нестационарных динамических систем

Непрерывные нелинейные динамические системы с распределенными параметрами, описываемые уравнениями

$$y(t, x) = \int\limits_{0D}^t \int g_1(t, \tau_1, x, \xi) \omega(\tau_1, \xi) d\xi d\tau_1 + \dots + \int\limits_{00}^t \int \dots \int\limits_{0D}^t g_N(t, \tau_1, \dots, \tau_N, x, \xi) \omega(\tau_1, \xi) \dots \omega(\tau_N, \xi) d\xi d\tau_1 \dots d\tau_N, \quad (34)$$

где $D \in R_n$ - область в пространстве R_n , $n = 1, 2, \dots$, в которой наблюдаются входной и выходной сигналы системы, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$,

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in D$, $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n$, $\omega(t, x)$ - входной сигнал; $y(t, x)$ - выходной сигнал;

$g_1(t, \tau_1, x, \xi)$, ..., $g_N(t, \tau_1, \dots, \tau_N, x, \xi)$ - ядра Вольтерра, подлежащие восстановлению.

Будем считать, что ядра Вольтерра $g_1(t, \tau, x, \xi)$, ..., $g_N(t, \tau_1, \dots, \tau_N, x, \xi)$ удовлетворяют следующему условию физической реализуемости:

$$g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n) = 0 \text{ при } \tau_1 > t \text{ или } \dots \text{ или } \tau_k > t, k = 1, 2, \dots, N, \text{ или } \xi \notin D. \quad (35)$$

Перепишем уравнение (34) в виде:

$$y(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^N \int\limits_{\underbrace{0 \dots 0}_k}^{+\infty} \dots \int\limits_{\underbrace{0 \dots 0}_n}^{+\infty} g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n) w(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad (36)$$

где $w_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{l=1}^k \omega(\tau_l, \xi_1, \dots, \xi_n)$, $k = 1, 2, \dots, N$.



УТВЕЖДЕНИЕ. Обозначим через L оператор $L = L_{x_n} [\dots L_{x_1} [L_t]]$, где $L_t, L_{x_1}, \dots, L_{x_n}$ операторы Лапласа, действующие по переменным t, x_1, \dots, x_n .

Пусть выполняются условия

$$G_k(p, \tau_1, \dots, \tau_k, p_1, \xi_1, \dots, p_n, \xi_n) = L[g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n)] = \hat{G}_k(p, p_1, \dots, p_n) e^{-\sum_{l=1}^k \tau_l q_{kl}(p)} e^{-\sum_{l=1}^n \xi_l \bar{q}_{kl}(p_l)}, \quad (37)$$

$$k = 1, 2, \dots, N,$$

где $\hat{G}_k(p, p_1, \dots, p_n), q_{k1}(p), \dots, q_{kk}(p), \bar{q}_{kl}(p_l), k = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, n;$ - аналитические функции в области, определяемой неравенствами: $\operatorname{Re} p \geq \alpha, \operatorname{Re} p_k \geq \alpha, k = 1, 2, \dots, n; \alpha = \text{const.}$

Тогда преобразование Лапласа уравнения (36) имеет вид:

$$Y(p, p_1, \dots, p_n) = \hat{G}_1(p, p_1, \dots, p_n) W_1(q_{11}(p), \bar{q}_{11}(p_1), \dots, \bar{q}_{1n}(p_n)) + \dots + \hat{G}_N(p, p_1, \dots, p_n) W_N(q_{N1}(p), \dots, q_{NN}(p), \bar{q}_{N1}(p_1), \dots, \bar{q}_{Nn}(p_n)). \quad (38)$$

Здесь $W_k(q_{k1}(p), \dots, q_{kk}(p), \bar{q}_{k1}(p_1), \dots, \bar{q}_{kn}(p_n)), k = 1, \dots, N,$ - многомерное преобразование Лапласа функций $w_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n)$ по переменным $\tau_k, k = 1, \dots, N; \xi_1, \dots, \xi_n$:

$$W_k(q_{k1}(p), \dots, q_{kk}(p), \bar{q}_{k1}(p_1), \dots, \bar{q}_{kn}(p_n)) = \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_n \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_k w_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) e^{-\sum_{l=1}^k \tau_l q_{kl}(p)} e^{-\sum_{l=1}^n \xi_l \bar{q}_{kl}(p_l)} d\tau_1 \dots d\tau_k, d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$



Восстановление ядер Вольтерра системы (36) проводится по результатам серии тестовых испытаний, состоящих из входных

$\omega_k(t, x_1, \dots, x_n)$ и выходных $y_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N(N+2n+3)}{2}$ сигналов.

$$y_m(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^N \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_k \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_n g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n) w_{mk}(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad m = 1, \dots, \frac{N(N+2n+3)}{2}. \quad (39)$$

$$\hat{G}_1(p, p_1, \dots, p_n) W_{m1}(q_{11}(p), \bar{q}_{11}(p_1), \dots, \bar{q}_{1n}(p_n)) + \dots + \hat{G}_N(p, p_1, \dots, p_n) W_{mN}(q_{N1}(p), \dots, q_{NN}(p), \bar{q}_{N1}(p_1), \dots, \bar{q}_{Nn}(p_n)) = Y_m(p, p_1, \dots, p_n),$$

$$m = 1, 2, \dots, \frac{N(N+2n+3)}{2},$$

относительно искомым функций: $\hat{G}_1(p, p_1, \dots, p_n)$, $q_{11}(p)$, $\bar{q}_{11}(p_1)$, $\bar{q}_{12}(p_2)$, \dots , $\bar{q}_{1n}(p_n)$,

...

$$\hat{G}_N(p, p_1, \dots, p_n), q_{N1}(p), q_{N2}(p), \dots, q_{NN}(p), \bar{q}_{N1}(p_1), \bar{q}_{N2}(p_2), \dots, \bar{q}_{Nn}(p_n).$$

Искомые ядра Вольтерра $g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n)$, $k = 1, 2, \dots, N$, определяются обратным преобразованием Лапласа.

Полученные выше результаты перенесены на системы со сосредоточенными параметрами, которые являются частными случаями систем с распределенными параметрами.



Непрерывные нелинейные динамические системы с сосредоточенными параметрами, описываемые уравнениями

$$y(t) = \int_0^t g_1(t, \tau_1)x(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_0^t \dots \int_0^t g_N(t, \tau_1, \dots, \tau_N)x(\tau_1)\dots x(\tau_N)d\tau_1\dots d\tau_N, \quad (40)$$

где $x(t)$ -- входной и $y(t)$ -- выходной сигналы; $g_1(t, \tau_1), \dots, g_N(t, \tau_1, \dots, \tau_N)$ - ядра Вольтерра, подлежащие восстановлению.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть ядра Вольтерра $g_1(t, \tau), \dots, g_N(t, \tau_1, \dots, \tau_N)$ удовлетворяют следующим условиям

1. условию физической реализуемости:

$$g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k) = 0 \text{ при } \tau_1 > t \text{ или...или } \tau_k > t, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (41)$$

2. условиям, которые имеют вид

$$G_k(p, \tau_1, \dots, \tau_k) = L_t[g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k)] = \int_0^{+\infty} g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k)e^{-pt} dt = \hat{G}_k(p)e^{-\sum_{l=1}^k \tau_l q_{kl}(p)}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где $\hat{G}_k(p), q_{k1}(p), q_{k2}(p), \dots, q_{kk}(p)$ -- аналитические в полуплоскости $\text{Re } p \geq \alpha$, $\alpha = \text{const}$, функции.

Тогда преобразование Лапласа уравнения (40) имеет вид

$$Y(p) = \hat{G}_1(p)X(q_{11}(p)) + \dots + \hat{G}_N(p)X(q_{N1}(p))\dots X(q_{NN}(p)). \quad (42)$$

Восстановление ядер Вольтерра системы (40) проводится в результате анализа серии тестовых входных $x_k(t)$, и выходных

$y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N(N+3)}{2}$, сигналов.

Исследуютс несколько частных случаев системы уравнений (42).



Дискретные системы

Аналогичные результаты получены для нелинейных дискретных динамических систем, описываемых уравнениями:

$$y(k) = \sum_{l_1=0}^k g_1(k, l_1)x(l_1) + \dots + \sum_{l_1=0}^k \dots \sum_{l_N=0}^k g_N(k, l_1, \dots, l_N)x(l_1, \dots, l_N), \quad (43)$$

где $x(k)$, $k = 0, 1, \dots$ -- входной сигнал; $y(k)$, $k = 0, 1, \dots$ - выходной сигнал; $g_1(k, l_1)$, \dots $g_N(k, l_1, \dots, l_N)$, $k, l_k = 0, 1, \dots$ - ядра Вольтерра, подлежащие восстановлению.

Утверждение. Пусть ядра Вольтерра удовлетворяют условиям

1. $g_1(k, l_1) = 0$ при $k > l_1, \dots, g_N(k, l_1, \dots, l_N) = 0$ при $k > l_1$ или...или $k > l_N$,
2. $G_m(z, l_1, \dots, l_N) = \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k, l_1, \dots, l_m)z^{-k} = \hat{G}_m(z)[q_{m1}(z)]^{-l_1} \dots [q_{mm}(z)]^{-l_m}$, $m = 1, \dots, N$.

(44)

Тогда Z -преобразование уравнения (43) имеет вид

$$Y(z) = G_1(z)X(q_{11}(z)) + \dots + G_N(z)X(q_{N1}(z)) \dots X(q_{NN}(z)). \quad (45)$$



Восстановление проводится по серии входных $x_i(k)$, и выходных $y_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, \frac{N(N+3)}{2}$, сигналов, Z -преобразования

которых имеют вид

$$X_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_i(k)z^{-k}, \quad Y_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_i(k)z^{-k}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{N(N+3)}{2}.$$

Предположение, что ядра Вольтерра $g_1(k, l_1)$, $g_2(k, l_1, l_2), \dots, g_N(k, l_1, l_2, \dots, l_N)$ удовлетворяют условиям (44), приводит к системе уравнений

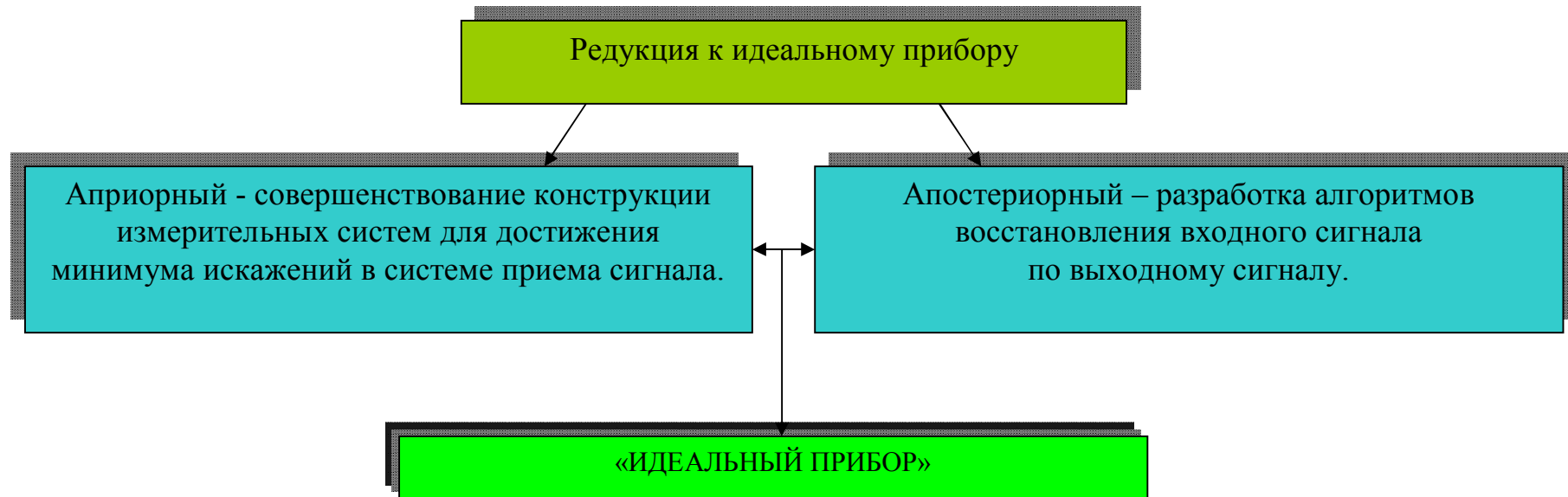
$$Y_i(z) = G_1(z)X_i(q_{11}(z)) + \dots + G_N(z)X_i(q_{N1}(z)) \dots X_i(q_{NN}(z)), \quad i = 1, 2, \dots, \frac{N(N+3)}{2}$$

относительно функций $G_1(z)$, $q_{11}(z)$, ..., $G_N(z)$, $q_{N1}(z)$, $q_{N2}(z), \dots, q_{NN}(z)$.

Искомые ядра Вольтерра $g_m(k, l_1, \dots, l_m)$, $m = 1, 2, \dots, N$, восстанавливаются обратным Z -преобразованием.

Бойков, И. В. Идентификация параметров нелинейных динамических систем, моделируемых полиномами Вольтерра / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2018. Том XXI, № 2(74).-- С. 17-31. Boikov I. V., Krivulin N. P. Identification of parameters of nonlinear dynamical systems simulated by Volterra polynomials // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2018. Vol. 12, No. 2, pp. 220-233.

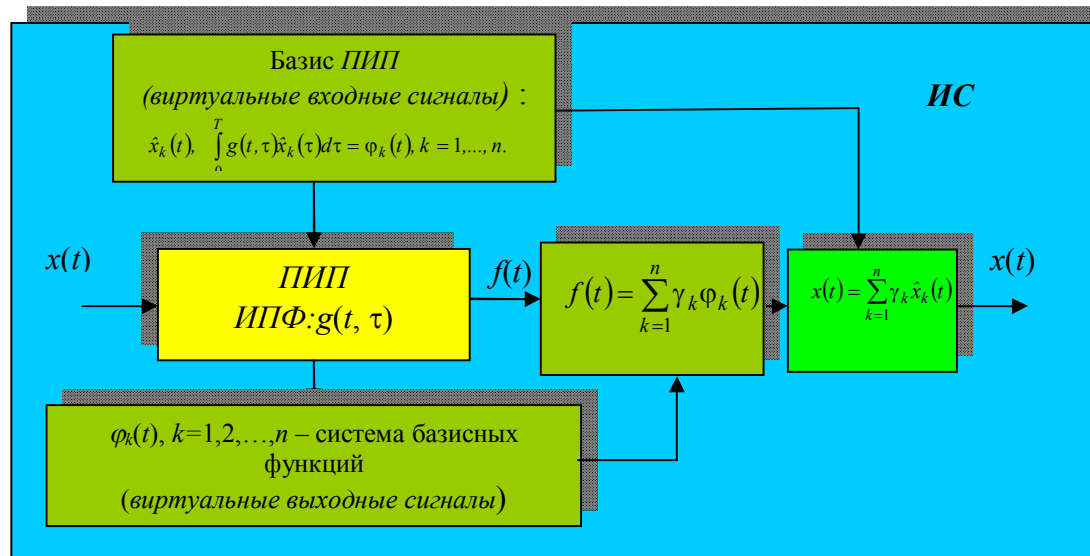
Бойков, И. В. О методах восстановления входных сигналов нелинейных динамических систем, представимых полиномами Вольтерра / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Сборник трудов XV международной научно-практической конференции <<Инновационные, информационные и коммуникационные технологии>>(1-10 октября, 2018) / под. ред. С. У. Увайсов - Москва: Ассоциация выпускников и сотрудников ВВИА им. проф. Жуковского, 2018. - С. 277-281.

**МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ**



Восстановление входных сигналов по базису ПИП

$$\int_0^T g(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (46)$$



Для ПИП, описываемого уравнением (46) определяется система функций $\hat{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\int_0^T g(t, \tau)\hat{x}_i(\tau)d\tau = \varphi_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (47)$$

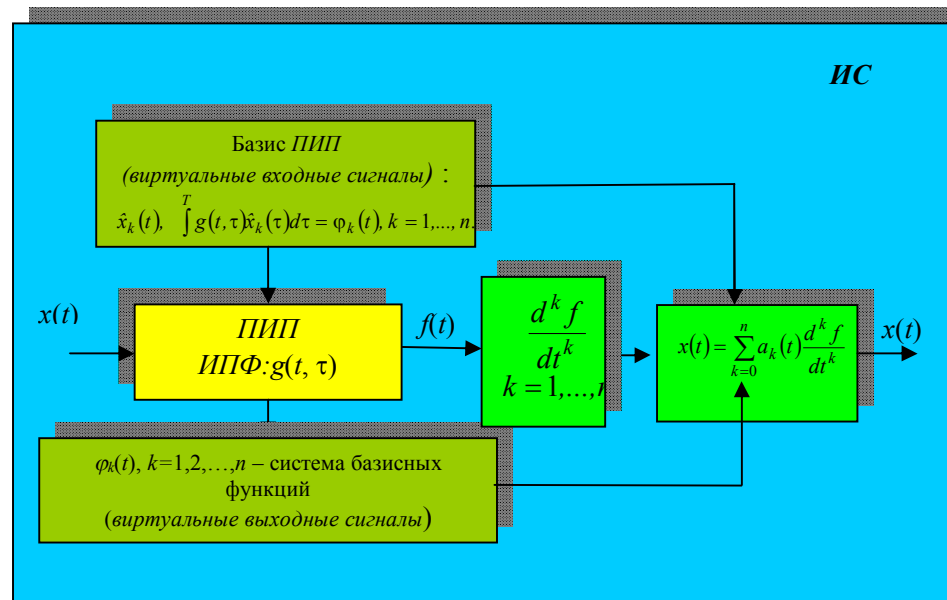
Входной сигнал: $x(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \hat{x}_i(t)$, γ_k , коэффициенты разложения функции в виде $f(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi_i(t)$.

Кривулин, Н. П. Восстановление входных сигналов нестационарных динамических систем / Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2018. - № 3. -- С. 64-78.



Восстановления входных сигналов нестационарных систем по результатам параметрической идентификации, основанные на построение математической модели измерительной системы (ИС) в виде дифференциального уравнения с переменными коэффициентами $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ вида

$$a_n(t) \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) f(t) = x(t). \quad (48)$$



Восстановление входного сигнала проводится по формуле (48), предварительно определив значения коэффициентов $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ дифференциального уравнения (48) и значения производных выходного сигнала $f(t)$: $\frac{d^n f(t)}{dt^n}, \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{df(t)}{dt}$.



Дискретные системы

Аналогичные результаты получены для дискретных систем.

Восстановление входного сигнала проводится путем построения разностного уравнения:

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \dots + a_0(k)y(k) = x(k). \quad (49)$$

Здесь $x(k)$, $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, - входной и выходной сигнал, соответственно.

Аналогичные результаты получены и для восстановления входных сигналов динамических систем с распределенными параметрами, математические модели которых систем описываются дифференциальными уравнениями в частных производных и их дискретными аналогами.



Восстановления входного сигнала по результатам обработки выходного сигнала измерительного преобразователя (коррекция выходного сигнала).

Для обработки выходного сигнала используется корректирующее устройство ($KУ$), реализация которого может быть выполнена как аппаратно, так и программно.

Структурная схема включения $KУ$ в $ИС$ приведена на рисунке 1.

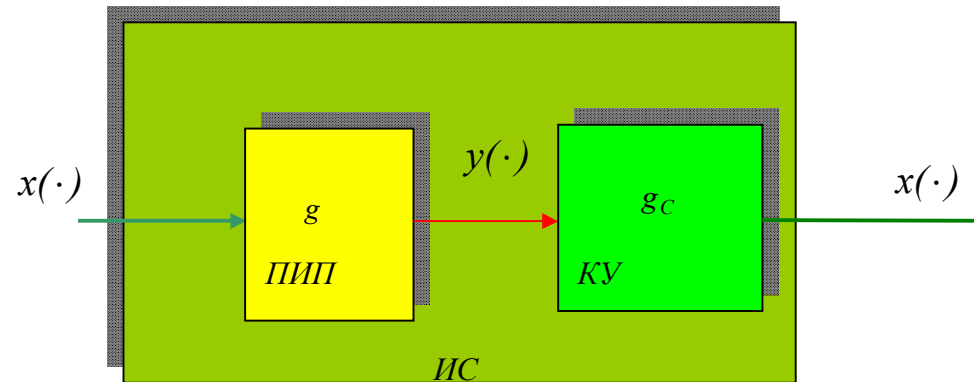


Рис. 1. Структурная схема $ИС$ с аппаратной коррекцией. $KУ$ – корректирующее устройство; $x(\cdot)$ – входной сигнал $ИС$ ПИП, $y(\cdot)$ – выходной сигнал ПИП;
 $x(\cdot)$ – выходной сигнал $KУ$ и $ИС$; g – ИПФ ПИП; g_c – ИПФ $KУ$.



Для измерительного преобразователя, описываемого уравнением

$$\int_0^t g(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), 0 \leq t < \infty, \quad (50)$$

строится измерительная система, состоящая из *ПИП*, описываемый уравнением (50) и *КУ*, функционирование которого описывается уравнением

$$\int_0^t g_C(t, \tau)f(\tau)d\tau = x(t), 0 \leq t < \infty, \quad (51)$$

$f(t)$ - входной сигнал *КУ* (выходной сигнал *ПИП* (50));

$x(t)$ - выходной сигнал *КУ* (восстанавливаемый входной сигнал *ПИП* (50));

$g(t, \tau)$ - *ИПФ ПИП*; $g_C(t, \tau)$ - *ИПФ КУ*.

Восстановление функций $g(t, \tau)$, $g_C(t, \tau)$ осуществляется по результатам идентификации методами, представленными в первом разделе.

Восстановление входного сигнала $x(t)$ в режиме работы измерительного преобразователя определяется по формуле

$$x(t) = \int_0^t g_C(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$



Дискретные системы

Аналогичные результаты получены для дискретных систем, функционирование которых описывается уравнениями

$$y(k) = \sum_{l=0}^k g(k,l)x(l), k = 0,1,2,\dots,$$

где $x(l)$, $l = 0,1,2,\dots$ и $y(k)$, $k = 0,1,2,\dots$ входной и выходной сигналы, соответственно;

$g(k,l)$, $k,l = 0,1,2,\dots$ - ИПФ ПИП.

Строится измерительная система, состоящая из ПИП и последовательно соединенного с ним КУ, функционирование которого описывается уравнением

$$x(k) = \sum_{l=0}^{\infty} g_C(k,l)y(l), k = 0,1,2,\dots,$$

где $y(l)$, $l = 0,1,2,\dots$ - выходной сигнал ПИП, $x(k)$, $k = 0,1,2,\dots$ - восстанавливаемый сигнал ПИП; $g_C(k,l)$ - ИПФ КУ



Восстановления входных сигналов непрерывных и дискретных нелинейных систем, описываемых уравнениями

$$y(t) = \int_0^t g_1(t, \tau_1)x(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_0^t \dots \int_0^t g_N(t, \tau_1, \dots, \tau_N) \prod_{i=1}^N x(\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_N, \quad (52)$$

$$y(k) = \sum_{l_1=0}^k g_1(k, l_1)x(l_1) + \dots + \sum_{l_1=0}^k \dots \sum_{l_N=0}^k g_N(k, l_1, \dots, l_N) \prod_{i=1}^N x(l_i), \quad (53)$$

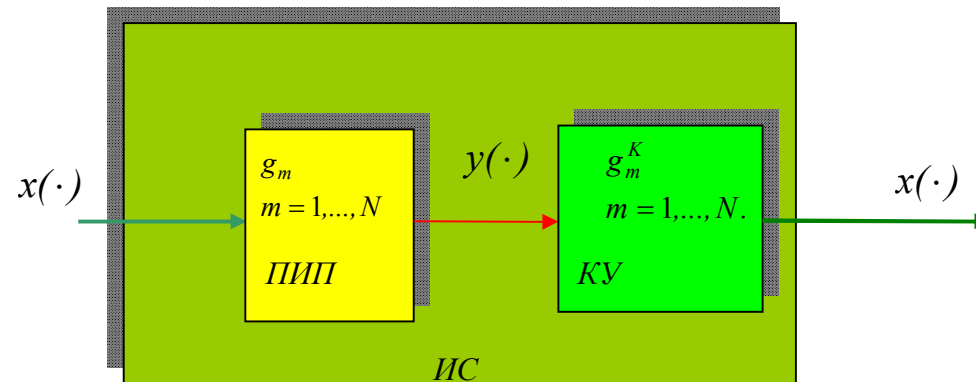


Рис. 2. Структурная схема ИС с аппаратной коррекцией. КУ – корректирующее устройство; $x(\cdot)$ – входной сигнал ИС ПИП, $y(\cdot)$ – выходной сигнал ИС ПИП;

$x(\cdot)$ – выходной сигнал КУ и ИС; g_m – ядра Вольтерра ПИП; g_m^K – ядра Вольтерра КУ.

$$x(t) = \int_0^t g_1^K(t, \tau_1)y(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_0^t \dots \int_0^t g_N^K(t, \tau_1, \dots, \tau_N)y(\tau_1) \dots y(\tau_N) d\tau_1 \dots d\tau_N, \quad (54)$$

$$x(k) = \sum_{l_1=0}^k g_1^K(k, l_1)y(l_1) + \dots + \sum_{l_1=0}^k \dots \sum_{l_N=0}^k g_N^K(k, l_1, \dots, l_N) \prod_{i=1}^N y(l_i), \quad (55)$$



ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Волоконно-оптические преобразователи динамических перемещений (ВОПДП)

Разработаны математические модели волоконно- *ВОПДП*, где в качестве модулирующих элементов (*МЭ*) выступают шаровая линза и отражательный аттенюатор.

Математическая модель представленных выше *ВОПДП* для измерения перемещения и силы действующего на *МЭ* определена в виде:

$$y(k) = \sum_{l=0}^k g(k,l)x(l), \quad k = 0,1,2,\dots, \quad (56)$$

и блока коррекции выходных сигналов - *КУ*, описываемых уравнениями

$$x(k) = \sum_0^k g_x(k,l)y(l), \quad k = 0,1,2,\dots, \quad (57)$$

где $k = 0,1,2,\dots$ - дискретные значения времени; $x(k)$, $k = 0,1,\dots$ - входной сигнал *ПИП*; $y(l)$, $l = 0,1,\dots$ - выходной сигнал *ПИП*; $g(k,l)$, $g_x(k,l)$ - импульсная характеристика *ПИП* и *КУ*, соответственно, значения которых требуется определить.

Восстановление значений измеряемого перемещения в момент времени k проводится по формуле (57), в которой $x(k)$, $k = 0,1,\dots$ - измеряемое перемещение в момент времени k ; $y(l)$, $l = 0,1,\dots$ - наблюдаемое инормированное значение светового потока в момент времени l ; $g_x(k,l)$ - импульсная переходная функция *КУ*.



Расчет конструктивных параметров *ППП* произведен на основе компьютерного моделирования, с использованием математической модели в виде разностного уравнения.

$$mx(k-2) + K_D x(k-1) + Cx(k) = ma(k),$$

где $x(k)$ - перемещение; m , C , K_D , - масса ЧЭ, жесткость пружин подвеса ЧЭ, K_D - коэффициент демпфирования;

$f(k) = ma(k)$ - переменная сила, действующая на ЧЭ, $a(k)$ - ускорение.

Для определения силы используется модель разностного уравнения.

Бадеева, Е. А. Разработка теории распределения светового потока в оптической системе волоконно-оптических преобразователей физических величин отражательного типа : моногр. / Е. А. Бадеева, Л. Н. Коломиец, Н. П. Кривулин, Т. И. Мурашкина, А. Г. Пивкин. -- Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2008. -- 102 с
Пат. 2338155 Российская Федерация. Волоконно-оптический преобразователь перемещения / Мурашкина Т. И., Зуев В. Д., Кривулин Н. П. -- Зарег. в гос. реестре РФ 10.11.2008.



2. Волоконно -оптическая информационно-измерительная система (ВОИИС) измерений параметров ускорений

Предложенный метод восстановления параметров вектора ускорений проводится по математической модели, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} mx'' + K_D^x x' + C^x x = ma_x(t), \\ my'' + K_D^y y' + C^y y = ma_y(t), \\ mz'' + K_D^z z' + C^z z = ma_z(t). \end{cases}$$

$x, x', x'', y, y', y'', z, z', z''$ - соответственно проекции перемещения, скорости и ускорения ЧЭ акселерометра (линзы) на осях Ox , Oy , Oz ;

m, C, K_D - масса, жесткость и коэффициент демпфирования;

$a(t)$ - измеряемое ускорение.

Разработана схемная реализация устройства, восстанавливающего входной сигнал.

Использование предложенного метода позволяет:

- определять величину, направление и координаты точки приложения вектора ускорения, скорость и ускорение их изменения;
- регистрировать параметры вектора приращения измеряемого ускорения в течении выбранного интервала времени;
- обеспечивать возможность создания простых, малогабаритных, дешевых и надежных волоконно - оптических акселерометров с возможностью их использования в составе волоконно - оптических сетей сбора данных со спектральным мультиплексированием.

Пат. 2147750 Российская Федерация. Способ измерения параметров векторов ускорений / Мещеряков В. А., Мурашкина Т. И., Капезин С. В., Кривулин Н. П., Баранов С. С. -- Зарег. в гос. реестре РФ 20.04.2000



4. **Жидкостно-аналитическая измерительная система.** ЖАИС представляет собой матрицу, состоящую из n -ого числа сенсоров, которые различаются по каким-либо свойствам или параметрам чувствительности,

$$y(k) = \sum_{l=0}^m g(k,l)x(l), \quad k = 1, 2, \dots, n, .$$

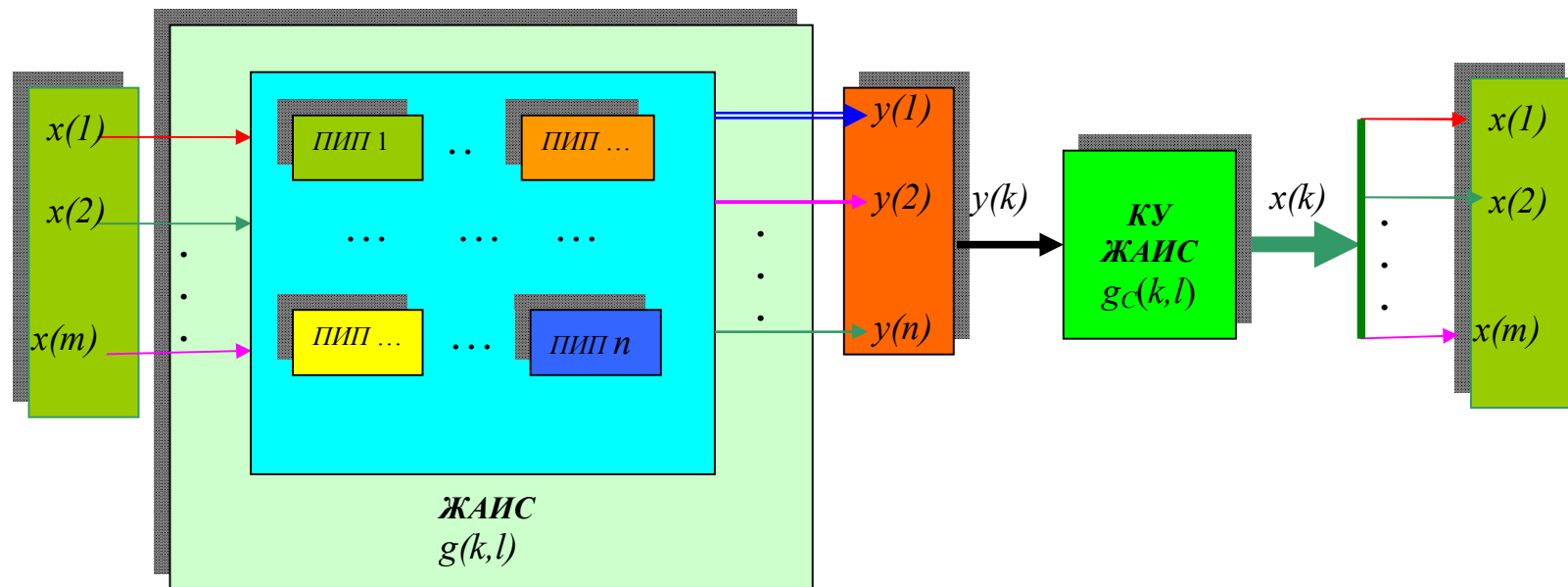


Рисунок 1. Схема жидкостно-аналитической измерительной системы (ЖАИС).

$$x(l) = \sum_{k=1}^N g_c(k,l)y(k), \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

Кривулин, Н. П. Моделирование распределения светового потока в оптической системе волоконно-оптического сигнализатора уровня жидкости : моногр. / Н. П. Кривулин, Д. И. Серебряков. -- Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2007. -- 76 с.

Кривулин, Н. П. Методы идентификации мультисенсорных систем / Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2019. – № 2 (50). – С. 47–58.

Общероссийский семинар

Информатика, управление и системный анализ, 18 февраля 2020 г.



4. Пьезодатчики динамических давлений (ПДД)

Разработаны алгоритмы¹ восстановления входного сигнала пьезодатчика динамических давлений (ПДД) функционирующего при мощных и быстроизменяющихся температурных воздействиях (термоударах) в диапазоне от минус 253 °С до 700 °С.

По экспериментально полученным временным зависимостям выходных сигналов первичного и вторичного измерительного преобразователей пьезодатчика динамического давления разработаны:

1. математическая модель функционирования пьезодатчика при термоударе;

$$y(k) = \sum_{l=0}^m g(k, l)x(l),$$

2. алгоритм восстановления входного сигнала пьезодатчика при термоударе.

$$x(l) = \sum_{k=1}^N g_c(k, l)y(k), \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

Предложенный способ синтеза математической модели пьезодатчика позволил:

- снизить погрешность измерения акустического давления датчиком ДХС 525 при термоударном воздействии рабочей среды - при температуре минус 180 °С с 67% до 3 % и при температуре + 200 °С - с 35% до 2 %;
- уменьшить диапазон коэффициента влияния температуры преобразования датчика ДХС 525 при функционировании в диапазоне температур от минус 180 до (25 ± 10) °С с $(0,8--1,1)$ до $(0,95--1,02)$ и в диапазоне температур от (25 ± 10) до 200 °С с $(0,8-1,2)$ до $(0,98-1,03)$.

¹ Бойков, И. В. К вопросу о синтезе математических моделей пьезоэлектрических датчиков акустического давления / И. В. Бойков, М. А. Щербаков, Н. П. Кривулин, В. В. Кикот, В. П. Маланин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки, 2017. -- 1. С. 106--108.



5. Вихретоковые измерительные преобразователи перемещений.

Восстановление входных сигналов вихретоковых преобразователей перемещения¹ основан на коррекции выходного сигнала $u(k, T)$ преобразователя при термоударном воздействии T_d °С и осуществляет редукцию к идеальному прибору на основе модели, которая описывается дискретным рядом Вольтерра второго порядка:

$$x(k) = \sum_{l=0}^k g_1(k-l, T_d) u(l, T_d) + \sum_{l_1=0}^k \sum_{l_2=0}^{k-l_1} g_2(k-(l_1+l_2), T_d) u(l_1, T_d) u(l_2, T_d).$$

Определение ядер Вольтерра проводится по серии испытаний, состоящих из совокупности эталонных входных $x_1(k)$, $x_2(k)$ и соответствующих выходных $u_1(k, T_d)$, $u_2(k, T_d)$ сигналов.

Проведенные натурные эксперименты показали, что максимальная погрешность восстановления входного перемещения при термоударном воздействии в -50 °С длительностью 49-50 секунд составила менее 6%

¹Бойков, И. В. Восстановление входных сигналов вихретоковых преобразователей перемещения при термоударных воздействиях / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, С. В. Абрамов, В. П. Маланин, В. В. Кикот // Измерительная техника. -- 2018. -- 11. -- С. 61--67. Boikov I. V., Krivulin N. P., Abramov S. V., Malanin V. P., Kikot V. V. Recovery of the Input Signals of Eddy-Current Displacement Transducers Under Thermal-Shock Actions // Measurement Techniques. February 2019, Volume 61, Issue 11, pp. 1118--1125.



ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Результаты:

- Разработаны и обоснованы методы восстановления импульсных характеристик систем (линейных и нелинейных) со сосредоточенными и распределенными параметрами;
- Разработаны и обоснованы методы восстановления импульсных характеристик нестационарных дискретных динамических систем (линейных и нелинейных) со сосредоточенными и распределенными параметрами;
- Разработан метод виртуальных сигналов для восстановления параметров непрерывных динамических систем со сосредоточенными и распределенными параметрами, математические модели которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных;
- Разработан метод виртуальных сигналов для восстановления параметров дискретных и дискретно-непрерывных динамических систем со сосредоточенными и распределенными параметрами;
- Разработаны и исследованы методы восстановления параметров эрмитарных систем, описываемые обыкновенными уравнениями и уравнениями в частных производных дробных порядков;
- Разработаны и исследованы методы восстановления входных сигналов ИИС (непрерывных и дискретных), основанные на редукции к <<идеальному прибору>>, по результатам:
 - параметрической идентификации систем; коррекции выходного сигнала для линейных и нелинейных систем
 - коррекции выходного сигнала для линейных и нелинейных систем



Выводы (направление дальнейших исследований):

1. Развитие метода виртуальных сигналов для нелинейных систем (со сосредоточенными и распределенными параметрами);
2. Применение методов параметрической идентификации к решению следующих задач:
 - диагностики, контроля и управления информационно-измерительных систем;
 - определения качественных характеристик сплошных сред.



ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

1. Бойков, И. В. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин. -- Пенза : Изд-во ПГУ. 2016. --398 с.
2. Кривулин, Н. П. Моделирование распределения светового потока в оптической системе волоконно-оптического сигнализатора уровня жидкости : моногр. / Н. П. Кривулин, Д. И. Серебряков. -- Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2007. -- 76 с.
3. Бадеева, Е. А. Разработка теории распределения светового потока в оптической системе волоконно-оптических преобразователей физических величин отражательного типа : моногр. / Е. А. Бадеева, Л. Н. Коломиец, Н. П. Кривулин, Т. И. Мурашкина, А. Г. Пивкин. -- Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2008. -- 102 с.
4. Бойков, И. В. Определение динамических характеристик измерительных преобразователей с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. -- 2000. -- 9. -- С. 20--22. Boikov I.V., Krivulin N.P. Determination of the Dynamic Characteristics of Measuring Transducers with Distributed Parameters // Measurement Techniques. 2000. V. 43. No. 9. P. 752--756.
5. Крупкина, Т. Ю. Установка для проверки волоконно-оптического датчика давления отражательного типа / Т. Ю. Крупкина, Т. И. Мурашкина, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. -- 2008. -- 5. -- С. 14--16. Krupkina T. Yu., Murashkina T. I., Krivulin N. P. An Apparatus for Checking a Reflective Fiber Optics Pressure Transducer // Measurement Techniques. 2008. T. 51. No. 5. C. 563--566.
6. Бойков, И. В. Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. -- 2013. -- 4. -- С. 6--11. Boikov I. V., Krivulin N. P. Recovery of the parameters of linear systems described by differential equations with variable coefficients // Measurement Techniques. 2013. V. 56. No. 4. P. 359--367.
7. Бойков, И. В. Восстановление входных сигналов дискретных динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. -- 2017. -- 11. -- С. 3--7. Boikov I. V., Krivulin N. P. Recovering the Input Signals of Discrete Dynamical Systems // Measurement Techniques. 2018. V. 60. No. 11. P. 1073--1080.
8. Бойков, И. В. Идентификация параметров нелинейных динамических систем, моделируемых полиномами Вольтерра / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Сибирский журнал индустриальной математики. -- 2018. Том XXI, 2(74). -- С. 17--31. Boikov I. V., Krivulin N. P. Identification of parameters of nonlinear dynamical systems simulated by Volterra polynomials // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2018. Vol. 12, No. 2, pp. 220--233.
9. Бойков, И. В. Восстановление входных сигналов вихревых преобразователей перемещения при термоударных воздействиях / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, С. В. Абрамов, В. П. Маланин, В. В. Кикот // Измерительная техника. -- 2018. -- 11. -- С. 61--67. Boikov I. V., Krivulin N. P., Abramov S. V., Malanin V. P., Kikot V. V. Recovery of the Input Signals of Eddy-Current Displacement Transducers Under Thermal-Shock Actions // Measurement Techniques. February 2019, Volume 61, Issue 11, pp. 1118--1125.



10. Кривулин, Н. П. Восстановление входных сигналов нестационарных динамических систем / Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико - математические науки, 2018. -- 3. -- С. 64--78.
11. Бойков, И. В. Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. -- 2012. -- 8. -- С. 3--14.
12. Бойков, И. В. Параметрическая идентификация систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. -- 2013. -- 9. -- С. 3--17.
13. Бойков, И. В. Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. -- 2013. -- 2 (26). -- С. 120--129.
14. Бойков, И. В. Параметрическая идентификация линейных динамических систем с рапределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. -- 2014. -- 7. -- С. 13--24.
15. Бойков, И. В. Идентификация дискретных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. -- 2014. -- 2 (30). -- С. 34--49.
16. Бойков, И. В. К вопросу о синтезе математических моделей пьезоэлектрических датчиков акустического давления / И. В. Бойков, М. А. Щербаков, Н. П. Кривулин, В. В. Кикот, В. П. Маланин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки, 2017. -- 1. С. 106--108.
17. Нефедьев, Д. И. Прогнозирование вскипания рабочей среды для предотвращения аварийных режимов эксплуатации энергетических установок с использованием пьезоэлектрических датчиков акустического давления / Д. И. Нефедьев, Н. П. Кривулин, В. П. Маланин, В. В. Кикот, А. В. Зверовицков // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль, 2017. -- 4 (22). С. 14--21.
18. Кривулин, Н. П. Математическая формализация критериев оптимальности основных метрологических характеристик ВОП с открытым оптическим каналом / Н. П. Кривулин // Метрология. -- 2008. -- 12. -- С. 34--43.
19. Голубинский, Ю. М. Математическая модель волоконно-оптического датчика перемещения со сферической линзы / Ю. М. Голубинский, В. Д. Зуев, Н. П. Кривулин // Датчики и системы. -- 2009. -- 3. -- С. 15--18.
20. Кривулин, Н. П. Распределение светового потока в ВОП с отражающим управляющим элементом / Н. П. Кривулин, Л. Н. Коломиец, Т. Ю. Крупкина, Т. И. Мурашкина // Датчики и системы. -- 2007. -- 6. -- С. 14--16.
21. Серебряков, Д. И. Имитационное моделирование эксперимента распределения светового потока в оптической системе, включающей границу раздела сред с разными коэффициентами преломления / Д. И. Серебряков, Н. П. Кривулин // Датчики и системы. -- 2007. -- 11. -- С. 45--47.
22. Зуев, В. Д. Волоконно-оптический преобразователь перемещений со сферической линзой / В. Д. Зуев, Н. П. Кривулин, Т. И. Мурашкина // Датчики и системы. -- 2008. -- 5. -- С. 9--10.



23. Кривулин, Н. П. Моделирование модуляции светового потока в оптической системе волоконно-оптического преобразователя / Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. -- 2008. -- 3. -- С. 151--159.
24. Кривулин, Н. П. Моделирование распределения интенсивности светового потока в пространстве волоконно-оптического преобразователя перемещений с управляющим элементом в виде сферической линзы / Н. П. Кривулин, В. С. Волков, А. С. Щевелев // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. -- 2009. -- 12. -- С. 16--18.
25. Граевский О. С. Математическая модель волоконно-оптического преобразователя перемещения с управляющим элементом в виде сферической линзы / О. С. Граевский, Зуев В. Д., Н. П. Кривулин // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. -- 2009. -- 12. -- С. 19--22.
26. Бойков, И. В. Методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Программные системы: теория и приложения. -- 2014. -- Т. 5, 5 (23). -- С. 79--96. URL: http://psta.psisras.ru/read/psta2014_5_79-96.pdf
27. Серебряков, Д. И. Расчет конструктивных параметров чувствительного элемента волоконно-оптического сигнализатора уровня жидкости / Д. И. Серебряков, Т. И. Мурашкина, Н. П. Кривулин // Авиакосмическое приборостроение. -- 2006. -- 7. -- С. 20--22.
28. Кривулин, Н. П. Математическая модель распространения светового потока в световоде / Н. П. Кривулин, Д. И. Серебряков // Авиакосмическое приборостроение. -- 2006. -- 8. -- С. 7--9.
29. Голубинский, Ю. М. Математическая модель волоконно-оптического преобразователя перемещения с управляющим элементом в виде сферической линзы / Ю. М. Голубинский, В. Д. Зуев, Н. П. Кривулин // Авиакосмическое приборостроение. -- 2008. -- 5. -- С. 45--48.
30. Волков, В. С. Методика определения конструктивных параметров волоконно-оптического преобразователя с управляющим элементом в виде сферической линзы / В. С. Волков, В. Д. Зуев, Н. П. Кривулин, Т. И. Мурашкина // Авиакосмическое приборостроение. -- 2008. -- 10. -- С. 27--29.
31. Бойков, И. В. Методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Обобщенные постановки и решения задач управления : сб. тр. VII Междунар. симпозиума (GSSCP-2014) (26--30 сентября 2014 г., г. Геленджик -- с. Дивноморское, Краснодарский край, Россия). -- Геленджик, 2014. -- С. 46--55.
32. Бойков, И. В. Идентификация дискретно-непрерывных систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Международная конференция по математической теории управления и механике. 2 - 7 июля 2015г. Суздаль, 2015. С. 41 - 42.
33. Бойков, И. В. Идентификация динамических систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами дробного порядка / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань, 20 - 24 августа 2015 г.) -- Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 499 - 501.
34. Бойков, И. В. Идентификация параметров нелинейных динамических систем, моделируемых полиномами Вольтерра / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Сибирский журнал индустриальной математики. -- 2018. Том XXI, 2(74). -- С. 17--31. Boikov I. V., Krivulin N. P. Identification of parameters of nonlinear dynamical systems



simulated by Volterra polynomials // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2018. Vol. 12, No. 2, pp. 220--233.

35. Бойков, И. В. О методах восстановления входных сигналов нелинейных динамических систем, представимых полиномами Вольтерра / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Сборник трудов XV международной научно-практической конференции <<Инновационные, информационные и коммуникационные технологии>>(1-10 октября, 2018) / под. ред. С. У. Увайсов -- Москва: Ассоциация выпускников и сотрудников ВВИА им. проф. Жуковского, 2018. -- С. 277--281.
36. Кривулин, Н. П. Точное определение импульсной переходной функции по одному тестовому входному сигналу / Н. П. Кривулин // В сборнике: Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем Материалы XI Международной научно-технической конференции. под ред. И. В. Бойкова. 2016. С. 105-107.
37. Кривулин, Н. П. Определение параметров физических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами / Н. П. Кривулин // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. VIII Междунар. науч.-техн. конф., 26-30 мая 2014 г. -- Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. -- С. 172--178.
38. Пат. 2147750 Российская Федерация. Способ измерения параметров векторов ускорений / Мещеряков В. А., Мурашкина Т. И., Капезин С. В., Кривулин Н. П., Баранов С. С. -- Зарег. в гос. реестре РФ 20.04.2000.
39. Пат. 2338155 Российская Федерация. Волоконно-оптический преобразователь перемещения / Мурашкина Т. И., Зуев В. Д., Кривулин Н. П. -- Зарег. в гос. реестре РФ 10.11.2008.
40. Свидетельство о регистрации электронного ресурса 22789 Моделирование и идентификация динамических систем / Кривулин Н. П., -- Зарег. в ОФЭРНиО ФГБНУ ИУО РАО. 24.05.2017.



Пензенский государственный университет

Методы идентификации и восстановления входных сигналов динамических систем
И.В. Бойков, Н.П. Кривулин

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !!!