Математическое моделирование в задачах анализа несовместных систем условий методами теории графов и комбинаторной геометрии

Гайнанов Дамир Насибуллович

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Москва, 2017

Аннотация

Несовместные системы условий различного вида возникают в ряде прикладных задач. Например, такие системы возникают естественным образом в задачах распознавания образов в геометрической постановке и являются основным предметом рассмотрения в методе комитетов распознавания образов.

В докладе изучаются общие свойства несовместных системv условий. Рассматриваются системы независимости, связанные с общими системами несовместных условий, определяются графы систем независимости. Методами теории графов изучаются комбинаторные свойства систем независимости, порождаемых различными классами несовместных систем условий. Для ряда таких классов систем условий доказывается связность соответствующих графов систем независимости, являющаяся важнейшим их свойством с алгоритмической точки зрения. Подробно изучаются свойства графов независимости для класса несовместных систем линейных неравенств. Доказывается теорема о существовании цикла нечетной длины в таких графах, которая положена в основу эффективных алгоритмов поиска комитетов минимальной мощности для метода комитетов распознавания образов.

Аннотация

Вводится понятие G–диагонали выпуклого многогранника. Доказывается теорема о двойственности диагоналей выпуклого многогранника и максимальных совместных подсистем несовместных систем линейных неравенств. Полученная двойственность позволяет исследовать комбинаторные свойства несовместных систем линейных неравенств методами комбинаторной геометрии. Подробно изучаются свойства положительных базисов.

Комбинаторная задача выделения всех баз систем независимости общего вида рассматривается в формулировке расшифровки монотонной булевой функции, верхние нули которой соответствуют базам системы независимости. Вводится естественный критерий оптимальности алгоритма расшифровки монотонных булевых функций. Для класса монотонных булевых функций, порождаемых несовместными системами линейных неравенств предлагается оптимальный алгоритм ее расшифровки. Для класса монотонных булевых функций, порождаемых неориентированными графами предлагается эвристический алгоритм поиска максимального верхнего нуля с абсолютной оценкой отклонения полученного решения от точного решения.

Аннотация

Приводятся примеры практического применения полученных результатов при решении прикладных задач распознавания образов в геометрической постановке, оптимизации технологических маршрутов в металлургическом производстве и управления транспортными процессами.

Системы условий

Пусть

$$\mathfrak{S} := \{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots, \mathfrak{s}_m\} -$$

конечная непустая система условий и

$$[m] := \{1, 2, \ldots, m\} -$$

множество индексов условий, которыми помечены элементы множества $\mathfrak{S}$.

Булева решётка

$$\mathbb{B}(m)$$

всех частично–упорядоченных подмножеств $[m]$. Тогда

$$B \in \mathbb{B}(m)$$

называем мультииндексом (индексом) подсистемы $\{\mathfrak{s}_i : i \in B\}$ системы $\mathfrak{S}$.

Несовместные системы

Пусть задано отображение

$$\pi : \mathbb{B}(m) \longrightarrow 2^{\Gamma} ,$$

где Γ – непустое множество, такое что

$$\pi(\hat{0}) \neq \varnothing \; (\pi(\hat{0}) = \Gamma) , \quad (1)$$

$$B \in \mathbb{B}(m)^{(1)} \implies \pi(B) \neq \varnothing , \quad (2)$$

$$A, B \in \mathbb{B}(m), A \leqslant B \implies \pi(A) \supseteq \pi(B) , \quad (3)$$

$$\pi(\hat{1}) = \varnothing , \quad (4)$$

где $\hat{0}$ и $\hat{1}$ – наименьший и наибольший элементы $\mathbb{B}(m)$, и $\mathbb{B}(m)^{(1)}$ — множество атомов.

Система $\mathfrak{S}$, для которой π и 2^{Γ} удовлетворяют (1)–(4) — конечная несовместная монотонная система условий.

Блокатор

Непустое семейство непустых попарно различных подмножеств

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} : A_i \subseteq [m] \, , \; \mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}\,(m) \; .$$

Система представителей (блокирующее множество) семейства $\mathcal{A}$

$$B \subseteq [m] \colon \; B \cap A_i \neq \varnothing \; \forall \; i \in \{1, n\} \; ,$$

принадлежит блокатору $\mathfrak{B}\,(\mathcal{A})$, если

$$\forall \; b \in B \; \exists \; j \in \{1, n\} : \; (B - \{b\}) \cap A_j = \varnothing \; .$$

Блокатор $\mathfrak{B}\,(\mathcal{A})$ — семейство минимальных по включению систем преставителей семейства $\mathcal{A}$.

Идеал и фильтр

Порядковым идеалом $\mathbb{B}(m)$, порожденным множеством $\mathcal{A}$, называется

$$\mathfrak{I}(\mathcal{A}) = \{E \in \mathbb{B}(m) : \exists\, A \in \mathcal{A}, E \leqslant A\} \ ,$$

где

$$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) \subseteq \mathbb{B}(m) \setminus \{\hat{0}\} \ ,$$

и порядковым фильтром решетки $\mathbb{B}(m)$, порожденным множеством $\mathcal{A}$, называется

$$\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \{E \in \mathbb{B}(m) : \exists\, A \in \mathcal{A}, E \geqslant A\} \ ,$$

где

$$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}(m) \ .$$

Антицепь и комплекс

Множество попарно несравнимых в $\mathbb{B}(m)$ подмножеств называется антицепью:

$$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) = \mathbf{max}\mathcal{A} = \mathbf{min}\mathcal{A}\ , \ A_i \subseteq [m]\ ,$$

где $\mathbf{max}\mathcal{A}, \mathbf{min}\mathcal{A}$ — множество всех максимальных и множество всех минимальных элементов семейства $\mathcal{A}$ соответственно.

Неупорядоченное семейство множеств

$$\Delta(\mathcal{A}) = \{F \subseteq [m]\colon F \in \mathfrak{I}(\mathcal{A})\}\ ,$$

где $\mathcal{A}$ — антицепь, называется абстрактным симлициальным комплексом на множестве вершин $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$ с семейством гиперграней $\mathcal{A}$.

Система независимости

Пусть S — конечное множество и $\mathbb{S} \subseteq 2^S$. Пара $(\mathbb{S}, S)$ называется системой независмости, если

$$\forall\, F_1, F_2 \subseteq S \colon\ F_1 \subseteq F_2, F_2 \in \mathbb{S} \implies F_1 \in \mathbb{S}\,.$$

Таким образом, произвольный абстрактный симплициальный комплекс характеризуется свойством системы независимости:

$$F \subseteq G\,,\ G \in \Delta \implies F \in \Delta\,,$$

в частности, $\varnothing \in \Delta$.

МНП и МСП

Пусть $\mathbf{I}$ — семейство индексов минимальных несовместных подсистем — МНП, и $\mathbf{J}$ — семейство индексов максимальных совместных подсистем — МСП системы $\mathfrak{S}$, тогда

$$\mathbb{B}(m) = \mathfrak{I}(\mathbf{J}) \ \dot{\cup}\ \mathfrak{F}(\mathbf{I}) \ ,$$

$$\mathbf{J} = \mathfrak{B}(\mathbf{I})^{\perp} \ .$$

Граф системы независимости

Запись (V, Δ) обозначает абстрактный симплициальный комплекс Δ, с семейством гиперграней $\mathbf{max}\,\Delta$, на множестве вершин $V = \bigcup_{H \in \mathbf{max}\,\Delta} H$.

Графом системы независимости $\mathtt{ISG}(V, \Delta)$ называется простой граф, определяемый следующим образом:

- множеством вершин графа $\mathtt{ISG}(V, \Delta)$ является семейство гиперграней $\mathbf{max}\,\Delta$;
- семейством ребер графа $\mathtt{ISG}(V, \Delta)$ является семейство всех неупорядоченных пар гиперграней $\{H, H'\} \subseteq \mathbf{max}\,\Delta$, покрывающих множество вершин:

$$H \cup H' = V\ .$$

Гомоморфизм и изоморфизм комплексов

Для двух комплексов (V, Δ) и (V', Δ') отображение

$$\varphi : V \to V'$$

называется гомоморфизмом (симплициальным отображением), если

$$\varphi(F) \in \Delta' \; \forall \; F \in \Delta \; .$$

Если существует биективный гомоморфизм $\mathfrak{i} : V \to V'$ такой, что

$$\mathfrak{i}^{-1} : V' \to V \text{ — гомоморфизм } ,$$

то комплексы (V, Δ) и (V', Δ') изоморфны:

$$(V, \Delta) \simeq (V', \Delta') \; .$$

Утверждение 1

Если существует сюръективный гомоморфизм $\varphi : V \to V'$ комплекса (V, Δ) в комплекс (V', Δ'), то существует гомоморфизм графа $\mathtt{ISG}(V, \Delta)$ в граф $\mathtt{ISG}(V', \Delta')$.

Утверждение 2

Всякий конечный простой граф $\mathbf{G}$ изоморфен некоторому графу системы независимости.

Следствие 3

Всякий конечный простой граф $\mathbf{G} = (V, \mathcal{E})$ является графом системы независимости $\mathtt{ISG}(A, \Delta)$, связанным с некоторым комплексом (A, Δ), причем

$$2|A| \leq |V|^2 + |V| - 2|\mathcal{E}| \; .$$

Комплекс пересечений

Пусть
$$V = \left\{ v_i = (X_i, X_i') \colon i \in [m] \ , \ X_i, X_i' \subseteq X \right\} \ .$$
В этом мультисемействе определена операция пересечения пар подмножеств:
$$(X_{i_1}, X_{i_1}') \cap (X_{i_2}, X_{i_2}') = (X_{i_1} \cap X_{i_2}, X_{i_1}' \cap X_{i_2}') \ .$$
Комплекс пересечений $(V, \Delta_\cap)$, по определению, имеет вид
$$F \in \Delta_\cap \quad \Longleftrightarrow \quad \bigcap_{v \in F} v \neq (\emptyset, \emptyset) \ .$$

Утверждение 4

Пусть V — некоторое конечное мультисемейство упорядоченных пар $v_i = (Z_i, Z'_i)$, $i \in [m]$, замкнутых подмножеств $Z_i \subset Z$ и $Z'_i \subset Z$ связного топологического пространства Z, покрывающих пространство:

$$Z_i \cup Z'_i = Z \ .$$

Если $|\mathbf{max}\, \Delta_\cap| > 1$, то граф системы независимости $\mathtt{ISG}(V, \Delta_\cap)$ связен.

Пусть $\mathbf{F}(\boldsymbol{Z}) := \{f_i \colon \boldsymbol{Z} \to \mathbb{R}, i \in [m]\}$, $m > 1$, — конечная система вещественных непрерывных функций f_i над связным топологическим пространством $\boldsymbol{Z}$. Расмотрим два класса комплексов:

- $F \in \left(\mathbf{F}(\boldsymbol{Z}), \Delta_{\geq}\right)$ тогда и только тогда, когда система
$$\{\alpha_F f(\boldsymbol{z}) \geq 0 \colon f \in F\}$$
совместна для некоторого $\alpha_F^\star \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $F \in \left(\mathbf{F}(\boldsymbol{Z}), \Delta_{>}\right)$ тогда и только тогда, когда система
$$\{\alpha_F f(\boldsymbol{z}) > 0 \colon f \in F\}$$
совместна для некоторого $\alpha_F^\star \in \mathbb{R}$.

Утверждение 5

Если

$$|\max \Delta_{\geq}| > 1 \ ,$$

то граф системы независимости $\mathtt{ISG}(\mathbf{F}(\boldsymbol{Z}), \Delta_{\geq})$ связен.

Утверждение 6

Пусть $\mathbf{F}(Z)$ — система непрерывных функций с соответствующим комплексом $\big(\mathbf{F}(Z), \Delta_{>}\big)$ и $\big|\mathbf{max}\,\Delta_{>}\big| > 1$. Если множества $f^{-1}(0)$ нигде не плотны для каждой функции $f \in \mathbf{F}(Z)$, то

$$H \in \mathbf{max}\,\Delta_{>} \implies \mathbf{F}(Z) \setminus H \in \Delta_{>} .$$

Остаток любой максимальной совместной системы также совместен.

Следствие 7

Граф системы независимости $\mathtt{ISG}(\mathbf{F}(Z), \Delta_{>})$ не содержит изолированных вершин.

Утверждение 8

Пусть $|\mathbf{max}\,\Delta_>| > 1$. Если в системе $\mathbf{F}(Z)$ множества $h^{-1}(0)$ нигде не плотны для всех функций $h \in \mathbf{F}(Z)$ и выполнено условие

$$f, g \in \mathbf{F}(Z)\,, \quad f \neq g \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = \emptyset\,,$$

то граф системы независимости $\mathtt{ISG}(\mathbf{F}(Z), \Delta_>)$ связен.

Утверждение 9

Пусть $|\mathbf{max}\,\Delta_>| > 1$, и в системе $\mathbf{F}(Z)$ множества $h^{-1}(0)$ нигде не плотны для всех функций $h \in \mathbf{F}(Z)$. Если множество

$$Z' := Z \setminus \bigcup_{\substack{f,g \in \mathbf{F}(Z):\\ f \neq g}} \left(f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)\right)$$

связно, то граф системы независимости $\mathtt{ISG}(\mathbf{F}(Z), \Delta_>)$ связен.

Пусть $(\boldsymbol{V}, \Delta)$ — комплекс, чье множество вершин $\boldsymbol{V}$ — конечное подмножество точек сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, и непустое подмножество $F \subseteq \boldsymbol{V}$ — грань тогда и только тогда, когда множество F содержится в замкнутой полусфере.

Утверждение 10

Граф системы независимости $\mathtt{ISG}(\boldsymbol{V}, \Delta)$ связен.

Следствие 11

Если $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n) := \{f_i : \ i \in [m]\}$ — совокупность линейных функционалов $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, и $f_i \neq -\lambda f_j$ для любых различных $i, j \in [m]$ и положительных $\lambda \in \mathbb{R}$, то граф $\mathtt{ISG}\big(\mathbf{F}(\mathbb{R}^n), \Delta_{>}\big)$ связен.

Пусть $(\boldsymbol{V}, \Delta)$ — комплекс, чье множество вершин $\boldsymbol{V}$ — конечное подмножество точек сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, и непустое подмножество $F \subseteq \boldsymbol{V}$ — грань тогда и только тогда, когда множество F содержится в открытой полусфере.

Следствие 12

Граф системы независимости $\mathtt{ISG}(\boldsymbol{V}, \Delta)$ связен.

Несовместная система

Будем исследовать конечную несовместную систему

$$\mathfrak{S} = \big\{\langle \boldsymbol{a}_i, \mathbf{x}\rangle > 0 : \ \boldsymbol{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \ \|\boldsymbol{a}_i\| = 1, \ i \in [m]; \\ i_1 \neq i_2 \Rightarrow \boldsymbol{a}_{i_1} \neq -\boldsymbol{a}_{i_2}\big\} \quad (5)$$

однородных строгих линейных неравенств ранга n над вещественным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, чье множество задающих векторов $\boldsymbol{A}(\mathfrak{S}) = \{\boldsymbol{a}_i : \ i \in [m]\}$ не содержит пар антиподов.

Граф МСП

Пусть $\mathbf{J}$ семейство мультииндексов МСП системы (5). Комплекс $\Delta(\mathbf{J})$, с семейством гиперграней $\mathbf{J}$ на множестве вершин $[m]$ — семейство мультииндексов всех совместных подсистем системы $\mathfrak{S}$.

Граф $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ максимальных совместных подсистем (граф МСП) системы $\mathfrak{S}$ определяется как граф

$$\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S}) = \mathtt{ISG}\big([m], \Delta(\mathbf{J})\big)$$

системы независимости, отвечающей комплексу $\big([m], \Delta(\mathbf{J})\big)$.

Теорема 13

Граф $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ максимальных совместных подсистем системы (5) связен.

Лемма 14

Для произвольного мультииндекса $J_s \in \mathbf{J}$ максимальной совместной подсистемы системы $\mathfrak{S}$ выполнено включение

$$-\mathbf{C}_{>}(J_s) \subsetneqq \mathbf{C}_{>}([m] - J_s)\ .$$

Теорема 15

Пусть $J_s \in \mathbf{J}$ — мультииндекс некоторой максимальной совместной подсистемы системы (5).

(i) Степень вершины J_s в ее графе МСП $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ не меньше двух: $|\mathcal{N}(J_s)| \geq 2$.

(ii) Если каждая подсистема из n неравенств системы (5) совместна, то степень вершины J_s в ее графе МСП $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ не меньше n: $|\mathcal{N}(J_s)| \geq n$.

Лемма 16

Если $J_s \in \mathbf{J}$ и $J_t \in \mathbf{J}$ — мультииндексы двух различных максимальных совместных подсистем системы (5), то

$$J_s \cap J_t \neq \emptyset \,.$$

Теорема 17

Граф МСП $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ системы (5) содержит хотя бы один цикл нечетной длины.

Утверждение 18

Некоторый граф изоморфен графу МСП $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ системы $\mathfrak{S}$ ранга 2 над $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда этот граф представляет собой простой цикл нечетной длины q, $3 \le q \le m$.

Утверждение 19

Справедливы следующие утверждения:

(i) всякое ребро графа МСП $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ системы (5) принадлежит простому циклу (и, как следствие, граф $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ не имеет мостов) длины не более m;

(ii) граф $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ содержит простой цикл нечетной длины, не превосходящей m;

(iii) диаметр графа $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ не превосходит $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.

Утверждение 20

Пусть для некоторого k, $1 \le k \le n-1$, каждая подсистема из $k+1$ неравенств системы (5) совместна. Тогда степень любой вершины J_s в графе $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ не меньше $k+1$.

Утверждение 21

Если ранг каждой подсистемы из трех неравенств системы (5) равен трем, то ее граф МСП $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ является 2-связным.

Следствие 22

Если ранг каждой подсистемы из трех неравенств системы (5) равен 3, то следующие утверждения эквивалентны:

1) любые J_{i_1} и J_{i_2} системы $\mathfrak{S}$ принадлежат простому циклу $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$;
2) любой J_{i_1} и любые J_{i_2} и $J_{i_3} : J_{i_2} \cup J_{i_3} = [m]$, принадлежат простому циклу $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$;
3) любые $J_{i_1}, J_{i_2}, J_{i_3}$ и $J_{i_4} : J_{i_1} \cup J_{i_2} = J_{i_3} \cup J_{i_4} = [m]$, принадлежат простому циклу $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$;
4) для любых J_{i_1} и J_{i_2}, и для любой пары J_{i_3} и $J_{i_4} : J_{i_3} \cup J_{i_4} = [m]$, существует простая $(J_{i_1} \leftrightarrow J_{i_2})$-цепь $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$, содержащая J_{i_3} и J_{i_4};
5) для любых J_{i_1}, J_{i_2} и J_{i_3} существует простая $(J_{i_1} \leftrightarrow J_{i_2})$-цепь $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$, проходящая через вершину J_{i_3}.

Комбинаторные и структурные свойства выпуклых многогранников, положительных базисов векторных пространств и несовместных систем линейных неравенств.

Положительный базис

Положительный базис (ПБ) $\boldsymbol{B}$ линейного пространства $\boldsymbol{L}$ определяется как минимальное по включению подмножество в $\boldsymbol{L}$, положительная оболочка (наименьший выпуклый конус с вершиной в нулевом векторе $\mathbf{0} \in \boldsymbol{L}$, содержащий $\boldsymbol{B}$) которого совпадает с $\boldsymbol{L}$.

Для ПБ $\boldsymbol{B}$ в $\mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$n + 1 \le |\boldsymbol{B}| \le 2n \, .$$

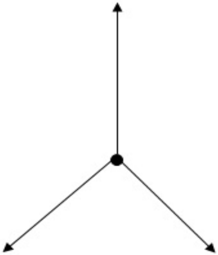
ПБ $\boldsymbol{B}$ в $\mathbb{R}^n$ называют минимальным, если $|\boldsymbol{B}| = n + 1$, и максимальным, если $|\boldsymbol{B}| = 2n$.

Подмножество $\boldsymbol{B}'$ ПБ $\boldsymbol{B}$ называют подбазисом базиса $\boldsymbol{B}$, если $\boldsymbol{B}'$ — ПБ в линейной оболочке $\operatorname{lin} \boldsymbol{B}'$ множества $\boldsymbol{B}'$. Подбазис $\boldsymbol{B}' \subset \boldsymbol{B}$ называют минимальным, если $\boldsymbol{B}'$ — минимальный ПБ в $\operatorname{lin} \boldsymbol{B}'$:

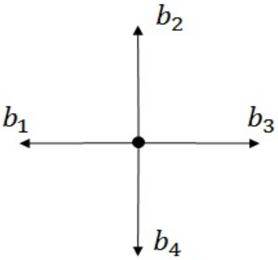
$$\operatorname{pos} \boldsymbol{B}' = \operatorname{lin} \boldsymbol{B}' \text{ и } |\boldsymbol{B}'| = \dim \operatorname{lin} \boldsymbol{B}' + 1 \, .$$

Пример

$\mathbb{R}^2$:



минимальный ПБ в $\mathbb{R}^2$
(строгий ПБ)



максимальный ПБ в $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 \dot{\cup} \boldsymbol{B}_2$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \{b_1, b_3\}, \boldsymbol{B}_2 = \{b_2, b_4\}$$

Определение

Множество $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$ называется односторонним, если оно целиком содержится в открытом полупространстве, ограниченном гиперплоскостью, проходящей через $\mathbf{0}$. Максимальные по включению односторонние подмножества некоторого множества будем называть максимальными односторонними подмножествами.

Пусть $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{n+r})$ — положительный базис $\mathbb{R}^n$ и $\{\boldsymbol{B}_i : \ i \in [k]\}$ — семейство максимальных односторонних подмножеств $\boldsymbol{B}$. Обозначим

$$\alpha(\boldsymbol{B}) = \max_{i \in [k]} |\boldsymbol{B}_i| \text{ и } \beta(\boldsymbol{B}) = \min_{i \in [k]} |\boldsymbol{B}_i| \ .$$

Утверждение 23

Пусть $\boldsymbol{B}$ — положительный базис пространства $\mathbb{R}^n$, содержащий $n+r$ точек. Тогда

$$n \le \alpha(\boldsymbol{B}) \le \begin{cases} n+r-1 & \text{при } r \in [n-1]\ , \\ n & \text{при } r = n\ . \end{cases}$$

Если $r \in [n-1]$, то для каждого s такого, что $n \le s \le n+r-1$, найдется положительный базис пространства $\mathbb{R}^n$ из $n+r$ точек такой, что $\alpha(\boldsymbol{B}) = s$.

Утверждение 24

Пусть $\boldsymbol{B}$ — положительный базис из $n+r$ точек в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$n \leq \beta(\boldsymbol{B}) \leq \begin{cases} n & \text{при } r \in \{1, 2, n-1, n\} \quad , \\ n+r-2 & \text{при } 2 \leq r < n-1 \quad . \end{cases}$$

Если $n + r \geq 4(r-1)$, то для всякого s такого, что $n \leq s \leq n+r-2$, найдется положительный базис $\boldsymbol{B}$ пространства $\mathbb{R}^n$ из $n+r$ точек такой, что $\beta(\boldsymbol{B}) = s$.

Симплициальное представление ПБ

Утверждение 25

Пусть $\mathbf{H}$ — гиперплоскость пространства $\mathbb{R}^n$, не содержащая $\mathbf{0}$, и $\boldsymbol{B}', \boldsymbol{B}''$ — конечные подмножества точек в $\mathbf{H}$. Положим $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' \cup -\boldsymbol{B}''$. Тогда множество $\boldsymbol{B}$ является положительным базисом пространства $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда

$$\dim(\boldsymbol{B}' \cup \boldsymbol{B}'') = n - 1 \ , \tag{6}$$

$$\operatorname{ri}\operatorname{conv}\boldsymbol{B}' \cap \operatorname{ri}\operatorname{conv}\boldsymbol{B}'' \neq \emptyset \ , \tag{7}$$

и для любых $\boldsymbol{B}_1' \subset \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2' \subset \boldsymbol{B}_2$ таких, что $\boldsymbol{B}_1' \cup \boldsymbol{B}_2' \neq \boldsymbol{B}_1 \cup \boldsymbol{B}_2$, условия (6) и (7) не выполняются одновременно.

Пару (B', B'') будем называть представлением положительного базиса B.

Представление (B', B'') положительного базиса B, в котором выпуклые оболочки $\mathrm{conv}\, B'$ и $\mathrm{conv}\, B''$ — симплексы, будем называть симплициальным представлением.

Утверждение 26

Пусть B — положительный базис из $n + r$ точек в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует линейный базис $B' \subset B$ в $\mathbb{R}^n$, строго отделяющийся в $\mathbb{R}^n$ от своего дополнения до B гиперплоскостью, содержащей $\mathbf{0}$. Более того, количество различных таких линейных базисов не меньше 2^r.

Утверждение 27

Любой положительный базис пространства $\mathbb{R}^n$ имеет симплициальное представление.

Циклическим d-многогранником называют выпуклую оболочку конечного подмножества, мощности $m > d$, точек моментной кривой $(t, t^2, \ldots, t^d)$, где $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

Многогранником с k-соседством называют многогранник, у которого любые множества из k вершин являются множествами вершин некоторой грани. Циклический d-многогранник — многогранник с $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$-соседством.

Пусть $\mathcal{P}$ — многогранник, $D \subsetneq \operatorname{vert} \mathcal{P}$. Будем говорить, что множество D (или $\operatorname{conv} D$) является

- A-диагональю, если $\operatorname{conv} D \cap \operatorname{ri} \mathcal{P} \neq \emptyset$, но для любого собственного подмножества $D' \subsetneq D$ множество $\operatorname{conv} D'$ является гранью многогранника $\mathcal{P}$;
- G-диагональю, если $\operatorname{conv} D \cap \operatorname{ri} \mathcal{P} \neq \emptyset$, но любое собственное подмножество $D' \subsetneq D$ лежит в некоторой собственной грани многогранника $\mathcal{P}$;
- F-диагональю, если $\operatorname{conv} D \cap \operatorname{ri} \mathcal{P} = \operatorname{ri} \operatorname{conv} D \cap \operatorname{ri} \mathcal{P} \neq \emptyset$.

Семейство всех A-, G- и F-диагоналей многогранника $\mathcal{P}$ соответственн

$$\mathcal{D}_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) \;,\; \mathcal{D}_{\mathrm{G}}(\mathcal{P}) \;,\; \mathcal{D}_{\mathrm{F}}(\mathcal{P}) \;,$$

и семейство всех r-мерных диагоналей (r-диагоналей) соответственно:

$$\mathcal{D}^r_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) \;,\; \mathcal{D}^r_{\mathrm{G}}(\mathcal{P}) \;,\; \mathcal{D}^r_{\mathrm{F}}(\mathcal{P}) \;.$$

Утверждение 28

Для A-, G- и F-диагоналей d-многогранника $\mathcal{P}$ справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{D}^r_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}^r_{\mathrm{G}}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}^r_{\mathrm{F}}(\mathcal{P}), \quad r \in [d-1] ;$$

$$\mathcal{D}^0_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) = \mathcal{D}^0_{\mathrm{G}}(\mathcal{P}) = \mathcal{D}^0_{\mathrm{F}}(\mathcal{P}) = \mathcal{D}^d_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) = \mathcal{D}^d_{\mathrm{G}}(\mathcal{P}) = \mathcal{D}^d_{\mathrm{F}}(\mathcal{P}) = \emptyset ;$$

$$\mathcal{D}^1_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) = \mathcal{D}^1_{\mathrm{G}}(\mathcal{P}) = \mathcal{D}^1_{\mathrm{F}}(\mathcal{P}) .$$

Утверждение 29

Пусть $\mathcal{P}$ — пирамида, а именно $\mathcal{P} = \mathrm{conv}\left(\{v\} \cup \mathcal{P}'\right)$, для некоторого многогранника-основания $\mathcal{P}'$ и точки $v \notin \mathrm{aff}\,\mathcal{P}'$. Тогда

$$\mathcal{D}_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) = \emptyset\,;$$
$$\mathcal{D}_{\mathrm{G}}(\mathcal{P}) = \left\{D = \{v\} \cup D' \colon D' \in \mathcal{D}_{\mathrm{G}}(\mathcal{P}')\right\}\,;$$
$$\mathcal{D}_{\mathrm{F}}(\mathcal{P}) = \left\{D = \{v\} \cup D' \colon D' \in \mathcal{D}_{\mathrm{F}}(\mathcal{P}')\right\}\,.$$

Утверждение 30

Каждая вершина произвольного многогранника, не являющегося симплексом, содержится по меньшей мере в одной его G-диагонали.

Обозначим условия:

C_1: многогранник $\mathcal{P}$ — циклический;

C_2: множество вершин $\operatorname{vert}\mathcal{P}$ находится в общем положении в $\operatorname{aff}\mathcal{P}$;

C_3: многогранник $\mathcal{P}$ — симплициальный;

C_4: $\mathcal{D}_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_{\mathrm{F}}(\mathcal{P})$;

C_5: $\mathcal{D}_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_{\mathrm{G}}(\mathcal{P})$;

C_6: $\mathcal{D}_{\mathrm{G}}(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_{\mathrm{F}}(\mathcal{P})$.

Утверждение 31

Определяя для любого многогранника $\mathcal{P}$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{C}_i \Rightarrow \mathrm{C}_i \ , \\ 0, & \text{в противном случае} \ , \end{cases}$$

имеем $(c_{ij})_{i,j \in [6]} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

Классификация многогранников

Два многогранника $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, решетки граней которых изоморфны, имеют, по определению, одинаковый комбинаторный тип. Отношение "иметь один комбинаторный тип" является отношением эквивалентност и порождает классификацию на множестве всех многогранников. Подобная классификация возможна и на основе понятия диагонали.

Для многогранника $\mathcal{P}$ обозначим через $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ класс всех многогранник имеющих комбинаторный тип как у $\mathcal{P}$, а через $\mathcal{F}_{\mathrm{A}}(\mathcal{P})$ — класс всех многогранников, имеющих A-диагональный тип как у $\mathcal{P}$; обозначения $\mathcal{F}_{\mathrm{G}}(\mathcal{P})$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{F}}(\mathcal{P})$ будут нести аналогичный смысл.

Утверждение 32

Для произвольного многогранника $\mathcal{P}$ справедливы соотношения

$$\mathcal{F}_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) \supset \mathcal{F}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_{\mathrm{G}}(\mathcal{P}) \supset \mathcal{F}_{\mathrm{F}}(\mathcal{P})\ .$$

Утверждение 33

Если $\mathcal{P}$ — симплициальный многогранник, то

$$\mathcal{F}_{\mathrm{A}}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_{\mathrm{G}}(\mathcal{P})\ .$$

Система общего вида

$$S = \left\{ \langle \boldsymbol{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : \ \boldsymbol{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r; \ \|\boldsymbol{a}_i\| = 1, \ i \in [m] \right\}, \tag{8}$$

определяемая множеством $\boldsymbol{A}(S) = \{\boldsymbol{a}_i : \ i \in [m]\}$ задающих ее векторов.

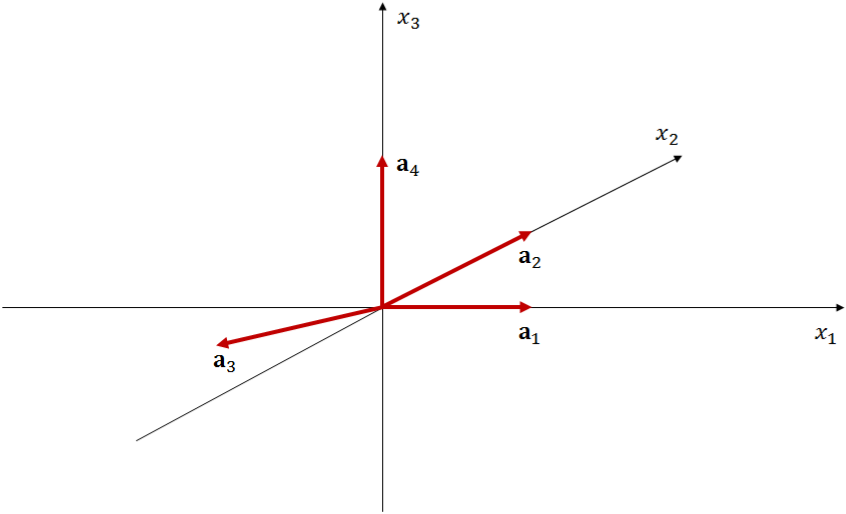
Символы $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{p}$ обозначают количества мультииндексов в семействах $\mathbf{J}$ и $\mathbf{I}$, соответственно:

$$\mathfrak{q} = |\mathbf{J}|, \ \mathfrak{p} = |\mathbf{I}|.$$

Неравенство $\langle \boldsymbol{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0$ системы S называется существенным, если оно не входит хотя бы в одну из ее МСП. Система S несократима, если все ее неравенства существенные.

Утверждение 34

Система S — несократимая тогда и только тогда, когда множество $\operatorname{pos} \boldsymbol{A}(\mathrm{S})$ является линейным подпространством.



$$\text{pos}\ \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\} \neq \text{lin}\ \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}\ .$$

Пусть дана конечная последовательность точек

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \subset \mathbb{R}^r$$

такая, что $\operatorname{aff} \boldsymbol{X} \simeq \mathbb{R}^r$.
Рассмотрим $(m-r-1)$-мерное пространство $\mathbf{K}(\boldsymbol{X})$ всех решений $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ следующей системы однородных линейных уравнений:

$$\sum_{i \in [m]} \beta_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0} \ , \quad \sum_{i \in [m]} \beta_i = 0 \ .$$

Зафиксируем в пространстве $\mathsf{K}(\boldsymbol{X})$ его произвольный упорядоченный базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{m-r-1})$.

Пусть $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$ — $(m-r-1) \times m$-матрица, строками которой служат векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{m-r-1}$ этого базиса. Для каждого индекса $i \in [m]$ обозначим через $\boldsymbol{x}_i^*$ i-ый столбец матрицы $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$, рассматриваем как вектор в пространстве $\mathbb{R}^{m-r-1}$.

Последовательность

$$\boldsymbol{X}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \ldots, \boldsymbol{x}_m^*)$$

называется **преобразованием Гейла** последовательности $\boldsymbol{X}$.

Теорема 35

Пусть задана несократимая несовместная система линейных неравенств S и последовательность $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ точек аффинной размерности $d = m - r - 1$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ такие, что

$$\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \ldots, \boldsymbol{b}_m^*) = (\lambda_1 \boldsymbol{a}_1, \lambda_2 \boldsymbol{a}_2, \ldots, \lambda_m \boldsymbol{a}_m)$$

для некоторых множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m > 0$. Справедливы утверждения:

(i) Множество $I \subset [m]$ — мультииндекс некоторой МНП системы S тогда и только тогда, когда дополнение $[m] \setminus I$ — мультииндекс гиперграни набора $\boldsymbol{B}$.

(ii) Множество $J \subset [m]$ — мультииндекс некоторой МСП системы S тогда и только тогда, когда дополнение $[m] \setminus J$ — мультииндекс диагонали набора $\boldsymbol{B}$.

Следствие 36

(i) Семейство $\mathbf{I}$ подмножеств множества $[m]$ — семейство мультииндексов всех МНП некоторой несократимой несовместной системы (8) ранга r над $\mathbb{R}^r$ тогда и только тогда, когда семейство

$$\mathbf{I}^{\perp} = \{[m] \setminus I : \; I \in \mathbf{I}\} -$$

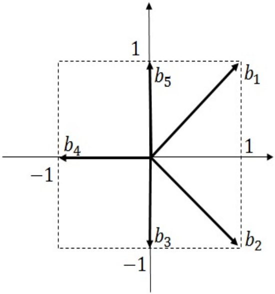
семейство мультииндексов всех гиперграней некоторого набора m точек аффинной размерности $d = m - r - 1$ в пространстве $\mathbb{R}^d$.

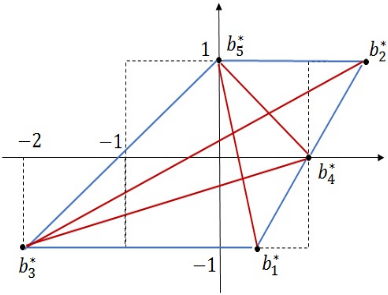
(ii) Семейство $\mathbf{J}$ подмножеств множества $[m]$ — семейство мультииндексов всех МСП некоторой несократимой несовместной системы (8) ранга r над $\mathbb{R}^r$ тогда и только тогда, когда семейство

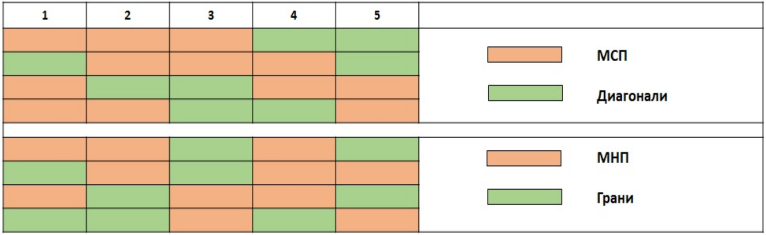
$$\mathbf{J}^{\perp} = \{[m] \setminus J : \; J \in \mathbf{J}\} -$$

семейство мультииндексов всех диагоналей некоторого набора m точек аффинной размерности $d = m - r - 1$ в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Пример


1
b_5
b_1
b_4
1
−1
b_3
b_2
−1


1
b_5^*
b_2^*
−2
−1
b_4^*
b_3^*
−1
b_1^*


1
2
3
4
5
МСП
Диагонали
МНП
Грани

Циклический многогранник определяется как выпуклая оболочка m различных точек параметрически заданной кривой

$$\boldsymbol{x}(t) = (t, t^2, \ldots, t^d) \in \mathbb{R}^d$$

и обозначается

$$\mathfrak{C}(d, m) \ .$$

Подсчитаем число диагоналей в многограннике $\mathfrak{C}(d, m)$ и, как следствие, дадим оценку для количества МСП в системах неравенств.

Обозначим через $\mathrm{D}(d,m)$ количество всех диагоналей, а через $\mathrm{D}_s(d,m)$ — количество диагоналей из s элементов набора $\boldsymbol{V}$ вершин циклического многогранника $\mathfrak{C}(d,m)$.

Утверждение 37

$$\mathrm{D}(d,m)=\begin{cases}1, & \text{если } m\le d+1\ ,\\ 2\binom{m-k-2}{k}+\binom{m-k-2}{k+1}, & \text{если } m\ge d+2 \text{ и } d=2k\ ,\\ \binom{m-k-2}{k+1}+\binom{m-k-3}{k}, & \text{если } m\ge d+2 \text{ и } d=2k+1\ .\end{cases}$$

Для двоичных наборов

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \text{ и } \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$$

из единичного дискретного m-мерного куба $\mathbf{B}^m = \{0, 1\}^m$ упорядочение $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$, по определению, выполнено в том и только том случае, когда $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in [m]$.

Количество единиц в наборе $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{B}^m$ будет обозначаться через $|\boldsymbol{\alpha}|$.

Обозначим $\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta}$ покоординатное сложение наборов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ над множеством $\mathbf{B}$, наделенным свойствами конечного поля $\mathbb{F}_2$ из двух элементов.

Множество $\mathfrak{f}^{-1}(0)$ составляют нули функции $\mathfrak{f}$, а множество $\mathfrak{f}^{-1}(1)$ — единицы этой функции. Подмножество

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{f}) = \mathbf{max}\,\mathfrak{f}^{-1}(0)$$

максимальных элементов ч.у. множества $\mathfrak{f}^{-1}(0)$ — множество верхних нулей функции $\mathfrak{f}$; подмножество

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{f}) = \mathbf{min}\,\mathfrak{f}^{-1}(1)$$

минимальных элементов ч.у. множества $\mathfrak{f}^{-1}(1)$ — множество нижних единиц функции $\mathfrak{f}$.

Верхний нуль $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{f})$ и нижняя единица $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{f})$ функции $\mathfrak{f}$ называются максимальным и минимальной соответсвенно, если

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \max_{\boldsymbol{\beta}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{f})} |\boldsymbol{\beta}| \text{ и } |\boldsymbol{\alpha}| = \min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathfrak{P}(\mathfrak{f})} |\boldsymbol{\beta}| \;.$$

Пусть с функцией $\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m$ связан *оракул* $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$, и $\varphi(G, \mathfrak{f})$ — количество обращений некоторого алгоритма G к оператору $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$ при расшифровке функции.
Оптимальность алгоритма G в смысле числа обращений к оператору $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$ можно оценивать следующими функционалами:

$$\varphi(G, m) = \max_{\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m} \varphi(G, \mathfrak{f}) \,, \tag{9}$$

$$\eta(G, m) = \max_{\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m} \frac{\varphi(G, \mathfrak{f})}{|\mathfrak{Q}(\mathfrak{f}) \dot\cup \mathfrak{P}(\mathfrak{f})|} \,, \tag{10}$$

$$\eta_1(G, m) = \max_{\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m} \left(\varphi(G, \mathfrak{f}) - |\mathfrak{Q}(\mathfrak{f}) \dot\cup \mathfrak{P}(\mathfrak{f})| \right) \,, \tag{11}$$

$$\eta_2(G, m) = \sum_{\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m} \varphi(G, \mathfrak{f}) \,. \tag{12}$$

Для оптимального по критерию $\varphi(G, m)$ (шенноновский) алгоритма:

$$\varphi(m) = \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} + \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor + 1} \,.$$

Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{B}^m)$ семейство всех подмножеств единичного куба $\mathbf{B}^m$.

Утверждение 38

Для любой функции выбора $\psi : \mathcal{B}(\mathbf{B}^m) \to \mathbf{B}^m$ справедливо неравенство

$$\eta(G_\psi, m) \le m + 1 \ .$$

Утверждение 39

Для функции $\eta(m)$ справедливо

$$\max\{2, \log_2 m^{1/2}\} \le \eta(m) \le \lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor + 2 \ .$$

Рассмотрим задачу выделения всех МСП несовместной системы линейных неравенств вида

$$\mathsf{S} = \left\{ \langle \boldsymbol{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : \ \boldsymbol{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \ \|\boldsymbol{a}_i\| = 1, \ i \in [m] \right\} .$$

Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) —$$

произвольный двоичный набор, и пусть $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — номера единичных компонент. Выделим в системе S подсистему неравенств с мультииндексом $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ и обозначим ее через $\mathsf{S}(\boldsymbol{\alpha})$. Положим

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathsf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \text{ совместна },\\ 1, & \text{если } \mathsf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \text{ несовместна }. \end{cases}$$

Оптимальный алгоритм

При некоторой модификации оператора $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$ можно предложить алгоритм расшифровки МБФ, оптимальный по всем критериям (9)–(12).

От нового оператора $\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}$ требуется:

1) установить значение функции $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha})$ для данного набора $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{B}^m$;
2) если $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 1$, то выдать одну нижнюю единицу $\boldsymbol{\alpha}'$ функции $\mathfrak{f}$ такую, что $\boldsymbol{\alpha}' \leq \boldsymbol{\alpha}$.

Пусть $\varphi(\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}, G, \mathfrak{f})$ — число обращений G к $\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}$ при расшифровке $\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m$. Для любых G и $\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m$ выполняется:

$$\varphi(\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}, G, \mathfrak{f}) \geq \left|\mathfrak{Q}(\mathfrak{f}) \dot{\cup} \mathfrak{P}(\mathfrak{f})\right| .$$

Утверждение 40

Существует алгоритм G^* расшифровки МБФ такой, что

$$\varphi(\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}, G^*, \mathfrak{f}) = |\mathfrak{Q}(\mathfrak{f}) \dot{\cup} \mathfrak{P}(\mathfrak{f})|$$

для всякой функции $\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m$.

Последовательность $G^*(\mathfrak{f})$ расшифровки функции $\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m$ алгоритмом G^* задана следующим образом:

$$\begin{aligned} G^*(\mathfrak{f}) &= \big(\boldsymbol{\alpha}^1, \mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha}^1), \boldsymbol{\alpha}^2, \mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha}^2), \ldots, \boldsymbol{\alpha}^k, \mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha}^k)\big)\ , \\ \boldsymbol{\alpha}^1 &= (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{B}^m\ , \\ \boldsymbol{\alpha}^i &= \psi\big(\mathbf{max}_{\leq}\big(\mathbf{B}^m - \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}(\{\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}(\boldsymbol{\alpha}^s) : \ s \in [i-1]\})\big)\big)\ , \end{aligned}$$

где ψ — произвольная функция выбора.

Сложность алгоритма

В процессе расшифровки функции $\mathfrak{f}$ в памяти вычислительной системы достаточно хранить лишь множество

$$\{\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}(\boldsymbol{\alpha}^1), \mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}(\boldsymbol{\alpha}^2), \ldots, \mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}(\boldsymbol{\alpha}^k)\}\ ,$$

то есть не более $|\mathfrak{Q}(\mathfrak{f}) \dot\cup \mathfrak{P}(\mathfrak{f})|$ двоичных наборов длины m.

Алгоритм G^* расшифровки МБФ оптимален по всем критериям (9)–(12).

Алгоритм КОМБ$(L, \{J_i \in \mathbf{J}: \ i \in T\})$

1. Найти все минимальные системы представителей для семейства
$$\{[m] \setminus J_i: \ i \in T_{\mathrm{pr}}\},$$
то есть сформировать блокатор $\mathfrak{B}(\{[m] \setminus J_i: \ i \in T_{\mathrm{pr}}\})$.
2. Проверить совместность подсистем системы $\mathfrak{S}$ с мультииндексами $M \cup L$ для всякого мультииндекса $M \in \mathfrak{B}(\{[m] \setminus J_i: \ i \in T_{\mathrm{pr}}\})$.
3. Если все такие системы несовместны, то алгоритм заканчивает свою работу, поскольку, семейство $\{J_i: \ i \in T_{\mathrm{pr}}\}$ совпадает с $\mathbf{J}$.
4. Если найдется мультииндекс $M \in \mathfrak{B}(\{[m] \setminus J_i: \ i \in T_{\mathrm{pr}}\})$ такой, что подсистема с мультииндексом $M \cup L$ совместна, то дополнить эту подсистему до МСП. Мультииндекс полученной МСП добавить в текущее семейство $\{J_i: \ i \in T_{\mathrm{pr}}\}$ мультииндексов МСП и вернуться к шагу 1.

Алгоритм ГРАФ-КОМБ решения $(\emptyset, \emptyset)$-задачи, основанный на связности графа МСП системы $\mathfrak{S}$, и использующий алгоритм КОМБ.

Алгоритм ГРАФ-КОМБ

1. Находим мультииндекс J_1 первой МСП, дополняя до МСП совместную подсистему с мультииндексом $\{1\}$, J_1 присваиваем метку 0.
2. Среди найденных мультииндексов МСП произвольным образом выбираем мультииндекс с меткой 0 и переходим к шагу 3. Если таких мультииндексов нет, переходим к шагу 4.
3. Для выбранного мультииндекса J_s среди найденных мультииндексов отбираем семейство $\{J_i : \ i \in T\}$ тех из них, которые смежны с J_s в графе МСП системы $\mathfrak{S}$. Решаем $\big([m] \setminus J_s, \{J_i : i \in T\}\big)$-задачу алгоритмом КОМБ$\big([m]\setminus J_s, \{J_i : \ i \in T\}\big)$, то есть находим все мультииндексы МСП, смежные с J_s в графе МСП; все вновь найденные мультииндексы МСП получают метку 0; мультииндекс J_s получает метку 1. Переходим к шагу 2.
4. Конец алгоритма.

Приближенные алгоритмы

Построены приближенные комбинаторный и графо–комбинаторный алгоритмы, которые находят значительное количество МСП несовместной системы линейных неравенств и затрачивают значительно меньшие средние вычислительные ресурсы на одну найденную МСП.

Комитет системы

Комитетом несовместной системы

$$\mathfrak{S} = \left\{ \langle \boldsymbol{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : \ \boldsymbol{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \ \|\boldsymbol{a}_i\| = 1, \ i \in [m]; \ i_1 \neq i_2 \Rightarrow \boldsymbol{a}_{i_1} \neq -\boldsymbol{a}_{i_2} \right\} ,$$

однородных строгих линейных неравенств ранга n над вещественным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, называется конечное множество векторов $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$, удовлетворяющее соотношению

$$|\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{K} : \ \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle > 0\}| > \tfrac{1}{2}|\mathcal{K}| ,$$

для каждого задающего систему $\mathfrak{S}$ вектора $\boldsymbol{a}_i$, $i \in [m]$.

Нечетные циклы в графе МСП

В основе методов построения комитетов системы $\mathfrak{S}$ лежит следующее фундаментальное свойство графа МСП $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$:

Теорема 41

Пусть последовательность $(J_{i_1}, J_{i_2}, \ldots, J_{i_{2k+1}}, J_{i_1})$ составляет цикл нечетной длины в графе $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ МСП системы $\mathfrak{S}$. Пусть выбраны попарно различные векторы

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{2k+1} \text{ —}$$

решения МСП с мультииндексами $J_1, J_2, \ldots, J_{2k+1}$ соответственно. Тогда совокупность векторов

$$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{2k+1}\}$$

является комитетом системы $\mathfrak{S}$.

Система неравенств

Пусть $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ — конечные множества векторов пространства признаков $\mathbb{R}^{n-1}$ — обучающая выборка. Дополнив каждый вектор из $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ новой n-ой компонентой, равной 1, получим два множества $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \subset \mathbb{R}^n$ расширенных векторов обучающей выборки.

Необходимо найти вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{a}, \mathbf{x} \rangle > 0, \quad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{B}\ , \\ \langle \boldsymbol{a}, \mathbf{x} \rangle < 0, \quad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}\ . \end{cases} \tag{13}$$

Альтернативные покрытия

Упорядоченную пару $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ семейств $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{M}$ подмножеств множества X, выбранных из семейства $\mathcal{M}$, будем называть альтернативным покрытием пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, если

$$\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A\,,\ \mathcal{B} \subseteq \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \text{ и } A \cap B = \emptyset$$

для любых множеств $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$.

Альтернативное покрытие будем называть конечным, если каждое из семейств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ конечно.

Мощностью конечного альтернативного покрытия $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ будем называть величину

$$|\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}|\ .$$

Задача эффективного разделения множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ пространства X в классе подмножеств из $\mathcal{M}$ может быть поставлена как задача поиска конечного альтернативного покрытия минимальной мощности пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$:

$$\mathrm{R}_1 : \ \big(X,\ (\mathcal{A}, \mathcal{B}),\ \mathcal{M} \subseteq \mathbf{2}^X\big) \to (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \ ,$$

$$\mathrm{R}_2 : \ \Big(X,\ (\mathcal{A}, \mathcal{B}),\ \mathcal{M} \subseteq \mathbf{2}^X,\ f :\ \mathbf{2}^{\mathcal{M}} \times \mathbf{2}^{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}\Big) \xrightarrow{\min f} (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \ ,$$

$$\mathrm{R}_3 : \ \Big(X,\ (\mathcal{A}, \mathcal{B}),\ \mathcal{M} \subseteq \mathbf{2}^X,\ f_{\mathrm{card}} = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|\Big) \xrightarrow{\min f_{\mathrm{card}}} (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \ .$$

Решение

Всякому комитету $\mathcal{K}$ системы неравенств (13) можно поставить в соответствие альтернативное покрытие $\big(\mathfrak{A}(\mathcal{K}), \mathfrak{B}(\mathcal{K})\big)$ пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ следующим образом:

$$\mathfrak{A} = \left\{\mathbf{C}_{>}(\mathcal{K}') : \ |\mathcal{K}'| > \tfrac{1}{2}|\mathcal{K}|, \ \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}\right\} \ ,$$
$$\mathfrak{B} = \left\{\mathbf{C}_{<}(\mathcal{K}') : \ |\mathcal{K}'| > \tfrac{1}{2}|\mathcal{K}|, \ \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}\right\} \ .$$

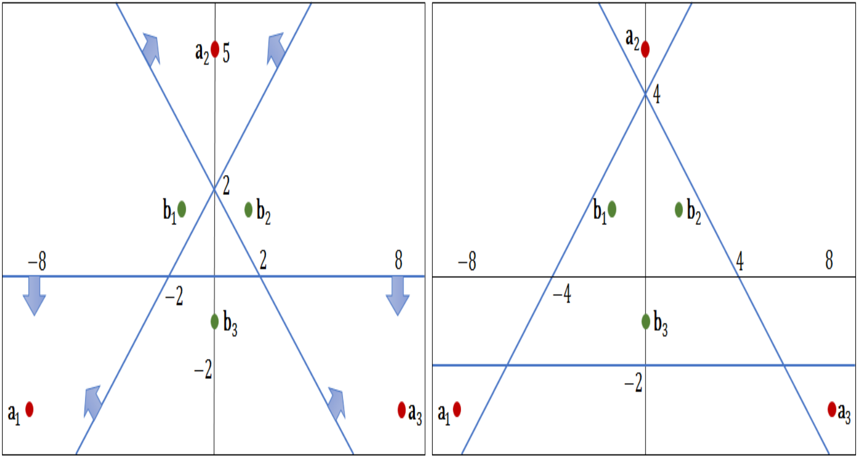
Пример

Пусть $X = \mathbb{R}^3$ и F — класс линейных функционалов, и

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{\boldsymbol{a}_1 = (-8, -3, 1),\ \boldsymbol{a}_2 = (0, 5, 1),\ \boldsymbol{a}_3 = (8, -3, 1)\}\ , \\
\mathcal{B} &= \{\boldsymbol{b}_1 = (-1.5, 1.5, 1),\ \boldsymbol{a}_2 = (1.5, 1.5, 1),\ \boldsymbol{a}_3 = (0, -1, 1)\}\ , \\
\mathcal{K}_1 &= \{f_1 = -\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3,\ f_2 = \boldsymbol{x}_2,\ f_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3\}\ , \\
\mathcal{K}_2 &= \{f_1 = -\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 4\boldsymbol{x}_3,\ f_2 = \boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3,\ f_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 4\boldsymbol{x}_3\}\ , \\
\mathfrak{A}(\mathcal{K}_1) &= \big\{\mathbf{C}_>\big(\{f_1, f_2\}\big),\ \mathbf{C}_>\big(\{f_1, f_3\}\big),\ \mathbf{C}_>\big(\{f_2, f_3\}\big)\big\}\ , \\
\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1) &= \big\{\mathbf{C}_<\big(\{f_1, f_2\}\big),\ \mathbf{C}_<\big(\{f_1, f_3\}\big),\ \mathbf{C}_<\big(\{f_2, f_3\}\big)\big\}\ , \\
\mathfrak{A}(\mathcal{K}_2) &= \big\{\mathbf{C}_>\big(\{f_1, f_2, f_3\}\big)\big\}\ , \\
\mathfrak{B}(\mathcal{K}_2) &= \big\{\mathbf{C}_<\big(\{f_1, f_2\}\big),\ \mathbf{C}_<\big(\{f_1, f_3\}\big),\ \mathbf{C}_<\big(\{f_2, f_3\}\big)\big\}\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{K}_1| = |\mathcal{K}_2| &= 3\ , \\
|\mathfrak{A}(\mathcal{K}_1)| + |\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1)| &= 6\ , \\
|\mathfrak{A}(\mathcal{K}_2)| + |\mathfrak{B}(\mathcal{K}_2)| &= 4\ .
\end{aligned}
$$

Геометрическая интерпретация



Комитеты и альтернативные покрытия

Пусть в пространстве X заданы конечные непересекающиеся подмножества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и фиксирован некоторый класс F вещественных функций над X. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}) > 0, & \text{если } \boldsymbol{x} \in \mathcal{A}\ , \\ f(\boldsymbol{x}) < 0, & \text{если } \boldsymbol{x} \in \mathcal{B}\ . \end{cases} \tag{14}$$

Пусть $\left\{\mathbf{J}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i) :\ i \in [\mathfrak{q}]\right\}$ — семейство всех МСП системы (14).

Составим матрицу инциденций $\mathbf{E} = (e_{ij})$ размера $|\mathcal{A}\dot{\cup}\mathcal{B}| \times \mathfrak{q}$. Первые $|\mathcal{A}|$ строк помечены элементами из $\mathcal{A}$, последние $|\mathcal{B}|$ строк — элементами из $\mathcal{B}$, а столбцы помечены МСП системы (14).

Постановка в терминах **E**

1. Задача построения комитета с минимальным количеством членов сводится к выделению минимального набора столбцов в матрице **E** такого, что каждая подстрока, полученная пересечением каждой строки матрицы с выделенным набором столбцов содержит больше единиц, чем нулей.
2. Задача построения комитета, порождающего альтернативное покрытие минимальной мощности, сводится к выделению набора столбцов в матрице **E** такого, что удовлетворяется условие 1 и, кроме того, общее количество минимальных по включению подстрок верхней полуматрицы и нижней полуматрицы минимально среди всех таких наборов.

Приложение анализа несовместных систем в задаче оптимизации технологических процессов металлургического производства.

Инфраструктурный граф

Заданы совокупность технологических агрегатов

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \ .$$

Инфраструктурный граф

— ориентированный граф $\overrightarrow{G} = (\mathcal{A}, E)$ с множеством вершин $\mathcal{A}$ и множеством дуг $E \subseteq \mathcal{A}^2$, такой что $(A_1, A_2) \in E$ тогда и только тогда, когда выходная ЕП агрегата A_1 может служить входной ЕП для агрегата A_2.

Мнжество ориентированных путей $\overrightarrow{G}$ определяет множество технологических маршрутов

$$\mathcal{P} = \left\{ P_i \colon P_i = (A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik_i}) \right\} \ , \ i \in [1, Q] \ .$$

Исполненный технологический маршрут (ИТМ)

— последовательность агрегатов и соответствующих состояний ЕП вида

$$AI_i = \left(A_{i1}, \mathrm{Pr}_{i1}\left(AI_i\right), \ldots, A_{is}, \mathrm{Pr}_{is}\left(AI_i\right)\right), \qquad (15)$$

где $\mathrm{Pr}_{ij}\left(AI_i\right)$ – набор значений параметров для ЕП в конкретной реализации AI_{ij} технологического маршрута AI_i.

В каждый момент времени t определено множество завершившихся ИТМ производства

$$\mathcal{P}_{\text{итм}}\left(t\right) = \left\{AI_i \colon i = \left[1, q\left(t\right)\right]\right\}.$$

Технологическая пирамида

Для каждой вершины $v \in \mathcal{A}\left(\overrightarrow{G}\right)$ определено подмножество вершин $\overrightarrow{G}^k(v) \subseteq \mathcal{A}\left(\overrightarrow{G}\right)$, в котором:

$$\forall\, u \in \overrightarrow{G}^k(v)\; \exists\, P \in \overrightarrow{G} : P = (v_1 = v, \ldots, v_{k+1} = u)\ .$$

Технологическая пирамида

— порожденный подграф $\mathrm{Pir}(\overrightarrow{G}, v)$ с корневой вершиной v вида

$$\left\langle v \cup \overrightarrow{G}(v) \cup \overrightarrow{G}^2(v) \cup \cdots \cup \overrightarrow{G}^k(v) \right\rangle_{\overrightarrow{G}}\ , \qquad (16)$$

такой, что любой технологический маршрут с началом в вершине v целиком лежит в этом подграфе

$$\forall\, P = (v, \ldots) \in \mathcal{P} \Longrightarrow P \in \mathrm{Pir}(\overrightarrow{G}, v)\ .$$

Продуктовые ИТМ

В некоторой технологической пирамиде рассмотрим продуктовый ИТМ

$$AI_i \in \mathrm{Pir}\left(\overrightarrow{G}, v\right) ,$$

такой, что выходная ЕП терминальной вершины — $\mathrm{term}\,(AI_i)$ — является одним из видов конечной продукции и характеризуется параметрами

$$\mathrm{Price}\,(\mathrm{term}\,(AI_i)) \ , \ \mathrm{C}\,(\mathrm{term}\,(AI_i)) \ ,$$

где Price и C — рыночная цена и себестоимость производства конечной продукции соответственно. Тогда величина

$$\mathrm{Ef}\,(AI_i) = \frac{\mathrm{Price}\,(\mathrm{term}\,(AI_i)) - \mathrm{C}\,(\mathrm{term}\,(AI_i))}{\mathrm{C}\,(\mathrm{term}\,(AI_i))}$$

определяет эффективность продуктового ИТМ.

Каждому продуктовому ИТМ в некоторой технологической пирамиде отвечает технологический маршрут:

$$P_i = P\left(AI_i\right): P_i = \left(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\right) \ ,$$
$$P_i, AI_i \in \mathrm{Pir}\left(\overrightarrow{G}, v\right) \ ,$$

где

$$AI_i = \left(BI_i, CI_i\right):$$
$$BI_i = \left(A_{i1}, \mathrm{Pr}_{i1}\left(AI_i\right) \ldots, A_{ik} = v', \mathrm{Pr}_{ik}\left(AI_i\right)\right) \ ,$$
$$CI_i = \left(A_{i(k+1)}, \mathrm{Pr}_{i(k+1)}\left(AI_i\right) \ldots, A_{in} = \mathrm{term}\left(AI_i\right), \mathrm{Pr}_{in}\left(AI_i\right)\right) \ ,$$
$$|\overrightarrow{G}\left(v'\right)| > 1 \ .$$

Тогда класс продуктовых ИТМ определяется как множество продуктовых ИТМ таких, что

$$\mathcal{P}^{(i)}_{\text{итм}}\left(v = A_{i_1}, t\right) = \left\{AI_i : P_i = P_j \ \forall\ i, j = [1, q\left(t\right)]\right\} \ .$$

Задача классификации технологических маршрутов

Пусть множество значений эффективности разбито на интервалы для каждого класса:

$$\mathrm{Ef}\left(\mathcal{P}^{(i)}_{\text{итм}}(v,t)\right) = \bigcup_{i:\ AI_j \in \mathcal{P}^{(i)}_{\text{итм}}} \mathrm{Ef}\left(AI_j\right) = \bigcup_{k=1}^{m} E_k\ .$$

Обучающая выборка для каждого класса представима в виде:

$$Z^{(i)}: \left(\mathrm{Ef}\left(AI_j\right), i, \mathrm{Pr}_{jk_j}\left(BI_j\right)\right) = \{a_j = (a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})\}\ ,$$

где $a_{j_0} \in \{E_1, \ldots, E_m\}$, a_{j_1} — идентификатор технологического маршрута P_i, и $a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ — параметры BI_j.

Определить, в какой класс эффективности попадет технологический маршрут $P \in \mathcal{P}$ при продолжении в классе $\mathcal{P}^{(i)}_{\text{итм}}(v,t)$.

Рассмотрим инфраструктурный граф

$$\overrightarrow{G} = (\mathcal{A}, E) \ ,$$

и некоторый технологический маршрут для производства конечной продукции

$$P = (A_1, A_2, \ldots, A_k) \ , \ A \in \mathcal{A}\left(\overrightarrow{G}\right) \ .$$

Маршрут P отвечает продуктовым ИТМ некоторого набора

$$\mathcal{P}_{\text{итм}}\,(v, t) = \{AI\} \ ,$$

множество значений эффективностей которого разбито на классы

$$\left\{\mathrm{Ef}\left(AI\right) : AI \in \mathcal{P}_{\text{итм}}\,(v, t)\right\} = \{0\} \cup \{1\} \ .$$

Обучающая выборка

Для некоторой вершины $v \in \mathcal{A}\left(\overrightarrow{G}\right) : |\overrightarrow{G}(v)| > 1$, формируется обучающая выборка вида:

$$\begin{cases} Z^1\,, \\ Z^2\,, \\ \ldots \\ Z^m\,, \end{cases} \quad \text{представленная как} \quad \begin{array}{l} (\mathcal{B}_0) \begin{cases} (a_{11}\,, \ldots\ldots\ldots, \; a_{1n})\ , \\ \ldots \\ (a_{l1}\,, \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \; a_{ln})\ , \end{cases} \\ (\mathcal{B}_1) \begin{cases} \left(a_{(l+1)1}\,, \ldots\ldots, \; a_{(l+1)n}\right)\ , \\ \ldots \\ (a_{m1}\,, \ldots\ldots, \; a_{mn})\ , \end{cases} \end{array}$$

где совокупность $\mathcal{B}_0$ определяет бракованные единицы продукции, и $\mathcal{B}_1$ — годные единицы продукции.

Таким образом, рассматриваемая задача классификации сводится к решению системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n > 0\ , \\ \dots \\ a_{l1} \cdot x_1 + \dots + a_{ln} \cdot x_n > 0\ , \\ a_{(l+1)1} \cdot x_1 + \dots + a_{(l+1)n} \cdot x_n < 0\ , \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n < 0\ . \end{cases}$$

При этом если $a_{j1} \cdot x_1 + \dots + a_{jn} \cdot x_n > 0$, то прогнозируется брак конечной ЕП, и если $a_{j1} \cdot x_1 + \dots + a_{jn} \cdot x_n < 0$, то прогнозируется годная конечная ЕП.

Приложение анализа несовместных систем в задаче планирования грузовых железнодорожных перевозок.

Задача планирования

Множество нормативных ниток:

$$\mathcal{N} = \{\mathrm{n}_i\} \ , \ i = 1, 2, \dots \ ,$$

упорядочено лексикографически относительно $t^{\text{н}}(\mathrm{n}_i), t^{\text{к}}(\mathrm{n}_i)$.
Неориентированный граф конфликтов:

$$G = (\mathcal{N}, \mathcal{E}) : \ \{\mathrm{n}_i, \mathrm{n}_j\} \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \exists \text{ конфликт} \ .$$

Для заданного множества нормативных ниток найти максимальное подмножество[1], такое что

$$\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N} \ ,$$

$$\left|\mathcal{N}'\right| = \max\left\{ \left|\mathcal{N}''\right| : G\langle\mathcal{N}''\rangle = (\mathcal{N}'', \varnothing) \right\} .$$

1 В теории сложности к задаче сводится $\mathcal{NP}$–полная задача о максимальном независимом множестве.

Монотонная булева функция, порождённая неориентированным графом:

$$f_G\colon\ \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}\ ,$$

где $G = (\mathcal{N}, \mathcal{E})\,, |\mathcal{N}| = n$.

Множество единиц монотонной булевой функции:

$$f_G\left(x\right) = 1 \iff \left|\mathcal{E} \cap \binom{\{\mathrm{n}_i \in \mathcal{N}\colon\ i \in \mathsf{supp}\left(x\right)\}}{2}\right| \geqslant 1\ ,$$

где $\binom{\{\cdot\}}{2}$ — семейство неупорядоченных 2–подмножеств множества $\{\cdot\}$ и $\mathsf{supp}\left(x\right) = \{i\colon\ x_i = 1\}$.

Для заданного неориентированного графа G найти набор

$$x \ \in\ \max_{|\cdot|} \max_{\subseteq}\ f_G^{-1}\left(0\right)$$

из множества максимальных верхних нулей порождённой МБФ.

Утверждение 42

Пусть $\mathrm{n}_i \in \mathcal{N} \colon G\langle N(\mathrm{n}_i)\rangle$ — полный подграф, где $N(\mathrm{n})$ — окрестность вершины в графе. Тогда

$$\exists\, x' \in \max_{|\cdot|} \max_{\subseteq} f_G^{-1}(0) : \; x'_i = 1 \,.$$

Вершина $\mathrm{n} \in \mathcal{N}$ называется k-вершиной графа G, если

$$\begin{cases} |N(\mathrm{n})| = k \,, \\ G\langle N(\mathrm{n})\rangle \text{ — полный подграф.} \end{cases}$$

Вершина $\mathrm{n} \in \mathcal{N}$ называется (k,m)-вершиной графа G, если

$$\begin{cases} |N(\mathrm{n})| = k \,, \\ C_k^2 - \left| \mathcal{E} \cap \binom{N(\mathrm{n})}{2} \right| = m \,. \end{cases}$$

Утверждение 43

Если $G_1 = (\mathcal{N}, \mathcal{E}_1)$, $G_2 = (\mathcal{N}, \mathcal{E}_2)$: $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$, то

$$\max_{|\cdot|} \max_{\subseteq} f_{G_2}^{-1}(0) \subseteq \max_{\subseteq} f_{G_2}^{-1}(0) \subseteq f_{G_2}^{-1}(0) \subseteq f_{G_1}^{-1}(0) .$$

Утверждение 44

Для $G = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$, если $\{e_1, \ldots, e_t\} \subseteq \binom{\mathcal{N}}{2} \setminus \mathcal{E}$, то

$$\max\nolimits_0 f_{G \cup \{e_1, \ldots, e_t\}} \geqslant \max\nolimits_0 f_G - t ,$$

где $\max_0 f$ – число единиц в максимальном верхнем нуле f.

Утверждение 45

Если $\mathrm{n}_i \in \mathcal{N}$ — (k, m)-вершина графа G, то

$$\exists\, x' \in \max_{\subseteq} f_G^{-1}(0) \colon x'_i = 1 \text{ и } |\mathrm{supp}(x')| \geqslant \max\nolimits_0 f_G - m.$$

Алгоритмы

Алгоритм $A(G, \mathcal{N})$

Входные данные: $G, \mathcal{N}$
Выходные данные: $\mathcal{N}_0, x$
Если $\mathcal{N}_0 = \varnothing$, то $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \max\limits_{|\cdot|} \max\limits_{\subseteq} \; f_G^{-1}(0)$.

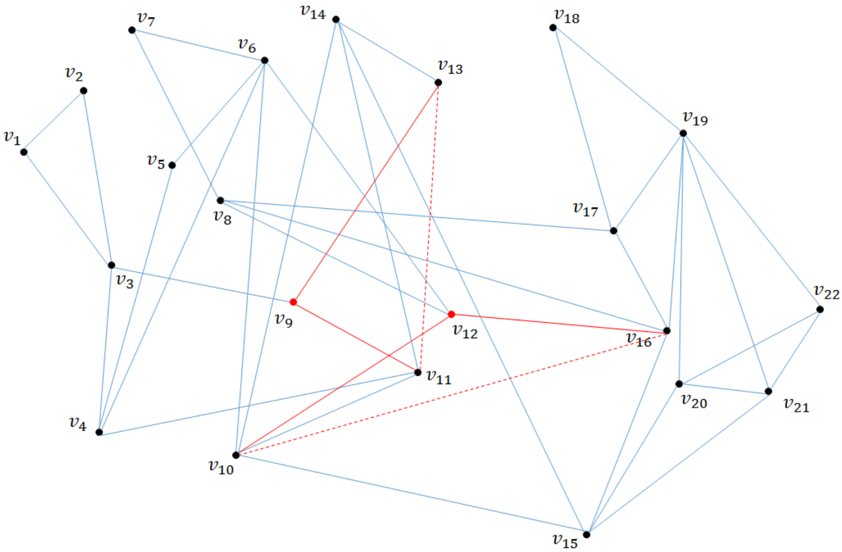
Алгоритм $B(G, \mathcal{N})$

Входные данные: G, $\mathcal{N}$
Выходные данные: $x \in \max\limits_{\subseteq} f_G^{-1}(0)$

Алгоритм $C(G, \mathcal{N})$

Входные данные: G, $\mathcal{N}$, $m = 0$
Выходные данные: $x \in \max\limits_{\subseteq} f_G^{-1}(0)$, m – оценка отклонения

Граф конфликтов $G = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$:



Результат

Алгоритм $B(G, V)$ (жадный поиск):

$$x = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, x_9 = 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \ ,$$

$$x \in \max_{\subseteq} \ f_G^{-1}(0) \ ,$$

$$\max{}_0 \ f_G \leqslant 9 \ .$$

Алгоритм $C(G, V)$ (поиск с возвратом):

$$x' = \left(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, x'_{12} = 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1\right) \ ,$$

$$x' \in \max_{\subseteq} \ f_G^{-1}(0) \ ,$$

$$\max{}_0 \ f_G \leqslant 10 \ .$$

Заключаем для МБФ, порождённой исходным графом:

$$x' \in \max_{|\cdot|} \max_{\subseteq} \ f_G^{-1}(0) \ , \ \left|\mathrm{supp}\left(x'\right)\right| = 9 \ .$$

Публикации (38)

- Gainanov D. N., Matveev A. O. Lattice Diagonals and Geometric Pattern Recognition Problems // Pattern Recognition and Image Analysis. 1991. V. 1. No. 3. P. 277–282.
- Gainanov D. N. Alternative Covers and Independence Systems in Pattern Recognition // Pattern Recognition and Image Analysis. 1992. V. 2. No. 2. P. 147–160.
- Гайнанов Д.Н., Коныгин А.В., Рассказова В.А. Матем. моделирование грузовых ж.д. перевозок методами теории графов и комбинаторной оптимизации // АиТ. 2016. № 11. С. 60–79.
- Гайнанов Д.Н., Рассказова В.А. Алгоритм расшифровки МБФ, порождаемых неориентированными графами // Вестник ЮУрГУ. 2016. Т. 9. № 3. С. 17–30.
- Гайнанов Д. Н., Беренов Д. А. Технологии Big Data в системах контроля качества металлургического производства // Big Data and Advanced Analytics, Минск 2017, PP. 65–70.
- Гайнанов Д. Н., Беренов Д. А. Алгоритм прогнозирования качества металлургического производства // Optimization and Applications, Petrovac 2017, принято к публикации.

Монографии (2)

- Гайнанов Д. Н. Комбинаторная геометрия и графы в анализе несовместных систем и распознавании образов. М.: Наука, 2014.
- Gainanov Damir. N. Graphs for Pattern Recognition. Infeasible Systems of Linear Inequalities. DeGruyter, 2016.

Патенты (30)

- Способ определения подлинности и достоинства банкнот и машина сортировки банкнот «Барс». Патент на изобретение № 2158443; дата выдачи 27.10.2000.
- Способ производства тонкого металлического листа из тонкой литой полосы и автома-тизированная линия технологического оборудования для производства тонкого металлического листа из тонкой литой полосы. Патент на изобретение № 2250151; дата вы-дачи 16.09.2003.
- Способ определения подлинности, достоинства и степени ветхости денежных билетов и устройство сортировки и счета. Патент на изобретение № 2224221; дата выдачи 20.02.2004.
- Способ производства качественной прутковой металлопродукции. Патент на изобретение № 2260495; дата выдачи 27.02.2004.
- Способ производства титаносодержащей продукции и устройство для осуществления способа. Патент на изобретение № 2311469; дата выдачи 30.06.2005.
- Способ и устройство устранения шумов, создаваемых водяными знаками, при определении степени ветхости банкнот в сортирующих машинах. Патент на изобретение № 2305322; дата выдачи 29.08.2005.