Методы решения двухэтапных задач стохастического программирования

Кибзун Андрей Иванович

Московский авиационный институт
Кафедра «Теория вероятностей»

Научный семинар на ВМК МГУ
22 марта, 2016

Задача линейного программирования

$$\Phi(u) = c_0^T u + a \to \min_{u \in U}, \qquad (1)$$

где U – выпуклый многогранник.
Обобщение (Charnes, 1955). Задача с вероятностным ограничением

$$\Phi(u) = c_0^T u + a \to \min_{u \in U, \mathcal{P}(S(u)) \geq \alpha}, \qquad (2)$$

где

$$S(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{X : Au + CX + d \leq 0\}, \qquad (3)$$

X – случайный вектор, $X \sim F_X(x)$.
Если $X \sim \mathcal{N}(m, K)$, K – диагональная матрица, а $S(u)$ – n-мерный прямоугольник, то задача может быть решена.
Исследование свойств $\mathcal{P}(S(u))$ (Raik, 1972).

2. Обобщение (Dantzig, 1952)

Потери на первом этапе

$$\Phi_1(u) = c_0^T u + a, u \in U. \qquad (4)$$

Потери на втором этапе

$$\Phi_2(u) = c_1^T y + d, y \geq 0, \qquad (5)$$

при условии, что

$$Au + By \geq X, \qquad (6)$$

где X – случайный спрос, возникший после реализации стратегии $u \in U$, y – стратегия второго этапа.
Минимальные потери на втором этапе

$$\Phi_2(u, X) = \min_{y \geq 0} \{c_1^T y + d | Au + By \geq X\}. \qquad (7)$$

Суммарные средние потери

$$\Phi(u) = c_0^T + a + \mathbf{M}[\Phi_2(u, X)] \to \min_{u \in U}. \qquad (8)$$

3. Двойственные переменные (Wets, 1962)

$$\Phi_2(u, X) = d + \max_{v \in V} (X - Au)^T v, \tag{9}$$

где

$$V \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{v : B^T v \le c_1\}. \tag{10}$$

Пусть v^j, $j = \overline{1, J}$ – вершины многогранника V, тогда

$$\Phi_2(u, X) = d + \max_{j = \overline{1, J}} (X - Au)^T v^j, \tag{11}$$

где $\Phi_2(u, X)$ – кусочно-линейная выпуклая функция.
Тогда средние потери на двух этапах

$$\Phi(u) = c_0^T u + a + \mathbf{M}[\Phi_2(u, X)] \tag{12}$$

является выпуклой функцией по $u \in U$.
Исследование задачи, методы решения (Wets, Kall, Birge, ...).

Функция потерь

$$\Phi(u, X) = c_0^T u + a + X^T A_1 u + \Phi_2(u, X), \tag{13}$$

где

$$\Phi_2(u, X) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in \mathcal{Y}(u,X)} \{c_1^T y + d\},$$

X – случайный вектор с нормальным распределением $X \sim \mathcal{N}(0, I)$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ – стратегия первого этапа, $y \in \mathcal{Y}(u, X)$ – стратегия второго этапа из множества допустимых стратегий

$$\mathcal{Y}(u, X) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^s, y \geq 0, X^T A_{2i} u + c_2^T u + b_i^T y \geq a_3^T X + d_i, \overline{1, l}\}. \tag{14}$$

5. Модель формирования портфеля ценных бумаг

Изменение капитала

$$C_1 = C_0(1 + u_0 b + u^T X), \tag{15}$$

где C_0 – начальный капитал, u_0, u_i, $i = \overline{1, I}$, – доли капитала,

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=0}^{I} u_i = 1, u_i \geq 0, i = \overline{0, I} \right\}, \tag{16}$$

X_i – доходность i-й ценной бумаги, b – доходность безрискового актива.

Функция потерь

$$\Phi(u, X) = C_0 - C_1 = -C_0(u_0 b + u^T X). \tag{17}$$

Биржевой парадокс

$$\mathbf{M}[C_N(u^0, X)] \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty, C_N(u^0, X) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{P}} 0. \tag{18}$$

6. Постановка задачи с функцией квантили

Функция вероятности

$$P_\varphi(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}\{X : c_0^T u + X^T A_1 u + a + d + \Phi_2(u, X) \le \varphi\},$$

где

$$\Phi_2(u, X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \inf\limits_{y \in Y(u,X)} c_1^T y, \ \mathcal{Y}(u, X) \neq \varnothing, \\ \infty, \ \mathcal{Y}(u, X) = \varnothing. \end{cases}$$

Функция квантили

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \ge \alpha\}, \alpha \in (0, P^*),$$

$$P^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{u \in U} \mathcal{P}\{X : \mathcal{Y}(u, X) \neq \varnothing\}.$$

Задача оптимизации

$$\varphi_\alpha = \inf_{u \in U} \varphi_\alpha(u), u_\alpha = \arg\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u).$$

7. Сведение к задаче смешанного целочисленного линейного программирования

1. Дискретизируем меру $\mathcal{P} \sim \mathcal{N}(0, I)$, заменяя ее аппроксимирующей мерой $\tilde{\mathcal{P}}$ следующим образом. Пусть x^k, $k = \overline{1, K}$, – точки, сгенерированные случайным образом на основе плотности $p(x) \sim \mathcal{N}(0, I)$. Пусть $p_k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathcal{P}}\{X = x^k\} = 1/K$.
2. Используя серию эквивалентных преобразований и доверительный метод, получаем задачу

$$\psi(S) = a + d + \min_{u \in U}\{c_0^T u + \max_{k=\overline{1,K}} \max_{j=\overline{1,J}}[u^T A_1^T x^k + \max_{j \in \overline{1,J}} \overline{a}^T(u, x^k)v^j],$$

где $V \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathbb{R}^s, B^T v \leq c_1, v \geq 0\}$,

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_1^T \\ \dots \\ b_s^T \end{pmatrix}, \overline{a}(u, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{31}^T x - u^T A_{2i}^T x + d_1 - c_{21}^T u \\ \dots \\ a_{3s}^T x - u^T A_{2s}^T x + d_s - c_{2s}^T u \end{pmatrix}.$$

множество S – доверительное, $\tilde{\mathcal{P}}(S) = \alpha$, состоящее из точек x^k, $k = \overline{1, K}$. Здесь v^j, $j = \overline{1, J}$, – вершины многогранника V.
3. Выбираем оптимальное доверительное множество S_α, минимизируя функцию $\psi(S)$ при условии, что $\tilde{\mathcal{P}}(S) = \alpha$.

8. Задача смешанного целочисленного линейного программирования 1

$$\hat{\psi}_\alpha \to \min_{u \in U, \delta_k \in \{0,1\}, \psi \in \mathbb{R}^1}$$

при ограничениях

$$c_0^T u + a + d + \gamma + \delta_k [u^T A_1^T x^k + \bar{a}^T (u, x^k) v^j - \gamma] \leq \psi, k = \overline{1, K}, j = \overline{1, J},$$

$$\sum_{k=1}^{K} \delta_k p_k \geq \alpha, \delta_k \in \{0, 1\}, k = \overline{1, K},$$

где γ – некоторая константа для носителя вероятностной меры $\mathcal{X}$ и множеств U и V (необходимо рассматривать усеченное нормальное распределение).
Решение задачи с помощью пакета OPTI Toolbox для MATLAB.

9. Задача смешанного целочисленного линейного программирования 2

$$\hat{\psi}_\alpha \to \min_{u \in U, \delta_k \in \{0,1\}, \psi \in \mathbb{R}^1}$$

при ограничениях

$$c_0^T u + a + d + u^T A_1^T x^k + \bar{a}^T (u, x^k) v^j - \delta_k (\Gamma - \gamma) \leq \psi, k = \overline{1, K}, j = \overline{1, J},$$

где константы γ и Γ удовлетворяют условиям

$$\gamma \leq a + d + u^T A_1^T x + \bar{a}^T (u, x^k) v^j \leq \Gamma, j = \overline{1, J}, u \in U, x \in \mathcal{X}.$$

Решение задачи с помощью пакета IBM ILOG CPLEX.

10. Задача смешанного целочисленного линейного программирования 3

Уменьшим количество целочисленных переменных δ_k, $k = \overline{1, K}$.
Заменим множество $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{k : k = \overline{1, K}\}$ на подмножество $\mathcal{K}_s \subset \mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}_s \stackrel{\text{def}}{=} \{k : k = \overline{1, K}, x^k \in S_{\rho_\alpha}\}.$$

где S_{ρ_α} – ядро гауссовской меры:

$$S_{\rho_\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{||a||=1} E_\alpha(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \le \rho_\alpha\},$$

$$E_\alpha(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{a^T x \le b_\alpha\}, \mathcal{P}(E_\alpha(a)) = \alpha.$$

Тогда ограничение для целочисленных переменных преобразуется к виду

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_s} \delta_k p_k + \mathcal{P}(S_{\rho_\alpha}) \ge \alpha, \delta_k \in \{0, 1\}.$$

Рассмотрим доверительный шар

$$S_{R_\alpha} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x : ||x|| \leq R_\alpha\},\ \mathcal{P}(S_{R_\alpha}) = \alpha$$

и ядро гауссовой меры $S_{\rho_\alpha} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x : ||x|| \leq \rho_\alpha\}$, где ρ_α – α-квантиль нормального распределения $\mathcal{N}(0,1)$.
Решим минимаксную задачу

$$\psi_r = \inf_{u \in U} \psi(S_r, u),\ \ u_r = \arg\min_{u \in U} \psi(S_r, u),$$

где радиус $r \in [\rho_\alpha, R_\alpha]$ фиксирован, а $\psi(S_r, u)$ – функция максимума

$$\psi(S_r, u) = a + d + c_0^T u + \max_{x \in S_r} [x^T A_1 u + \Phi_2(u, x)],$$

$$\Phi_2(u, x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_{y \in \mathcal{Y}(u, X)} \{c_1^T y + d\}.$$

12. Свойство функции максимума

Лемма 1

Функция $\psi(S_r, u)$ *– выпуклая по* $u \in U$ *для любого* $r \in [\rho_\alpha, R_\alpha]$ *и имеет вид*

$$\psi(S_r, u) = a + d + c_0^T u + \max_{j=\overline{1,J}} [r||(A_1 u + \bar{A}(u) v^j|| + \bar{b}^T(u) v^j],$$

где матрица $\bar{A}(u)$ *и вектор* $\bar{b}(u)$ *линейны по* $u \in U$*.*

Лемма 2

Для решения задачи квантильной оптимизации справедливы двухсторонние оценки

$$\psi_{\rho_\alpha} \leq \varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u_{R_\alpha}) \leq \psi_{R_\alpha},$$

причем $\psi_{R_\alpha} - \psi_{\rho_\alpha} \to 0$ *при* $\alpha \to 1$*.*

Рассмотрим множество

$$C_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a + d + c_0^T u + x^T A_1 u_r + \max_{j=\overline{1,J}} \bar{a}^T(u_r, x) v^j \leq \psi_r\},$$

где (ψ_r, u_r) – решение минимаксной задачи для $r \in [\rho_\alpha, R_\alpha]$. Выберем

$$r_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{r \in [\rho_\alpha, R_\alpha]} \{r : \mathcal{P}(C_r) \geq \alpha\}.$$

Теорема

Существует $r \in [\rho_\alpha, R_\alpha]$ *такое, что* $\mathcal{P}(C_r) \geq \alpha$ *и*

$$\varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u_r) \leq \psi_r < \psi_R.$$

Вычислим меру $\mathcal{P}(C_r)$ с помощью статистического моделирования

$$\mathcal{P}(C_r) = \mathcal{P}(C_r \backslash S_r) + \mathcal{P}(S_r) \approx \tilde{\mathcal{P}}(C_r \backslash S_r) + \mathcal{P}(S_r),$$

где $\tilde{\mathcal{P}}$ – дискретная мера, аппроксимирующая гауссову меру $\mathcal{P}$.

14. Пример

Пусть

$$\Phi(u,X) = c_0^T u + aX^T u + \bar{\Phi}(u,X),$$

где $X \sim \mathcal{N}(0, I)$, $X \in \mathbb{R}^2$,

$$\bar{\Phi}(u,X) = \min_{y\in Y}\{c_1^T y | X^T A_{2i} u + b_i^T y \geq bX_i, i = 1, 2\},$$

$n = m = L = s = 2$; $c_0^T = (0.3, -0.4)$; $c_1^T = (6, 3)$; $a = 0.1$, $b = 2.5$; $b_1^T = (2, -2.5)$; $b_2^T = (-2, 4)$;

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$Y = \{y : y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}, \ U = \{u : 10 \geq u_1 \geq 0, 10 \geq u_2 \geq 0\},$$

$$V = \{(10, 7); (3, 0); (0, 0.75); (0, 0)\}.$$

15. Результаты расчетов

α	K	Алгоритм 1				Алгоритм 2			
		$\overline{\varphi}_\alpha$	$\overline{u}_1$	$\overline{u}_2$	t_1	$\hat{\varphi}_\alpha$	u_{1r}	u_{2r}	t_2
0.9	10	2.925	0.242	1.000	20	3.018	0.696	0.728	9
0.9	10	2.504	1.000	0.667	20	3.378	0.695	0.730	8
0.9	100	2.662	0.953	0.683	90	3.325	0.695	0.729	30
0.9	100	2.743	0.933	0.615	90	3.008	0.692	0.739	30
0.9	1000	3.081	0.701	0.738	4500	3.160	0.696	0.727	360
0.99	100	5.214	0.635	0.740	180	5.462	0.698	0.723	13
0.99	100	4.298	0.686	0.702	160	4.369	0.715	0.699	12
0.99	1000	4.376	0.722	0.744	800	4.824	0.705	0.711	60
0.99	1000	4.787	0.778	0.768	800	5.510	0.699	0.720	70
0.99	10000	5.018	0.697	0.726	2500	5.031	0.697	0.726	240
0.99	20000	5.182	0.703	0.713	5200	5.184	0.703	0.714	500
0.999	1000	5.909	0.654	0.724	240	6.015	0.698	0.723	25
0.999	1000	5.451	0.696	0.766	240	5.910	0.698	0.723	20
0.999	10000	6.705	0.745	0.663	1100	6.754	0.701	0.718	130
0.999	10000	6.072	0.724	0.714	1100	6.661	0.701	0.717	140
0.999	100000	6.301	0.796	0.645	18000	6.309	0.703	0.715	600

16. Литература

- Kibzun A.I., Kan Yu.S. *Stochastic programming problems with probability and quantile functions.* Chichester: Wiley, 1996.
- Кан Ю.С., Кибзун А.И. *Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями.* М.: Физматлит, 2009.
- Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И. *О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования.* // АиТ, 2013, № 6, С. 66–86.
- Kibzun A.I. *Comparision of two algorithms for solving a two-stage bilinear stochastic programming problem with a quantile criterion.* // Applied Stochastic Models in Business and Industry. 2015, V. 31, No. 6, P. 862–874.