Методы детекции слабоамплитудных полезных сигналов на фоне сильных шумов случайной природы

проф. д.ф.-м.н. К. В. Руновский
(филиал МГУ в г. Севастополе)

I. Постановка задачи

$\boldsymbol{f(t) = h(t) + n(t)}$, $h(t)$ – полезный детерминированный сигнал, $n(t)$ – реализация Гауссовского случайного процесса с нулевым средним („белый шум“), $|\,n(t)\,| \gg |\,h(t)\,|$.

Частный случай: детекция гравитационных волн. NASA, DFG (SFB Transregio 07 „Gravitational Wave Astronomy“). GEO600 (Германия), VIRGO (Франция), LARGO (Италия), Институт Альберта Эйнштейна (Потсдам), Университет Тюбингена и др. организации в Англии, Германии, Франции, Италии.

Шумовая компонента $\boldsymbol{n(t)}$:

1) $P\{\,n(t_i) \in S_i : \; i = 1, \ldots, n\,\}$, $t_1 < \ldots < t_n$, – многомерное нормальное распределение (*Гауссовский процесс*);

2) $E(n(t)) = E(n(0)) = 0$;

3) $E(n(t+\tau)n(t)) = E(n(\tau)n(0)) = C(\tau)$ – *автоковариантная функция* (условие *слабой стационарности*);

4) $\mathcal{E}(\nu) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} C(\tau) e^{-i\nu\tau}\, d\tau = (2\pi)^{-1} \widehat{C}(\nu)$ – *спектральная плотность.*

1. $n(t) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} \sqrt{\mathcal{E}(\nu)}\, W(d\nu)$ – *формула Крамера;*

2. $W(\Delta) = \int\limits_{\Delta} W(d\nu) = \int\limits_{\Delta} \dfrac{\widehat{n}(\nu)}{\sqrt{\mathcal{E}(\nu)}}\, d\nu$ – *случайная спектральная мера*, обладающая свойствами:

a) $W(\Delta)/\sqrt{|\,\Delta\,|}$ – $(0,1)$– нормально распределена;

b) $E(W(\Delta)W(\Delta')) = |\,\Delta \cap \Delta'\,|$;

3. $\boldsymbol{P\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{|\,\Delta\,|}} \left| \int\limits_{\Delta} \dfrac{\widehat{n}(\nu)}{\sqrt{\mathcal{E}(\nu)}}\, d\nu \right| > \lambda \right\} = 1 - \Phi_0(\lambda)}$,

$$\Phi_0(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\lambda} e^{-x^2/2}\, dx \text{ – } \textit{функция Лапласа.}$$

4. $\boldsymbol{W(\Delta_1), \ldots, W(\Delta_n)}$ независимы, если $\boldsymbol{\Delta_1, \ldots, \Delta_n}$ попарно не пересекаются.

Полезный сигнал $\boldsymbol{h(t)}$:

A. полностью известен;

B. частично известен (имеется формула с неизвестными параметрами);

C. полностью неизвестен.

Гравитационная волна (случай B):

$$\widehat{h}(\nu) \;=\; a\nu^{-7/6}\cos\Big(T\nu \,+\, \varphi \,+\, b\nu^{-5/3}\Big)\;,\;\; (\,\nu > 0\,)\;;$$

$$\mathcal{E}(\nu) \;=\; \frac{\mathcal{E}_0}{5}\left(\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^4 + 2\left(1+\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right)\right)\,,$$

$$\mathcal{E}_0 = 3\cdot 10^{-48}\,Hz^{-1}\,,\;\; \nu_0 = 70\,Hz\,.$$

II. Некоторые известные методы детекции

1. *Matched filters* (согласованные фильтры) **(*templates*)** (шаблоны, образцы).

В случае A:

template (шаблон, образец): $F(t) \;=\; \mathcal{F}^{-1}(\,\mathcal{F}h(\nu)/\mathcal{E}(\nu))$,

matched filtering: $\lambda \;=\; \langle\, F,\, f\,\rangle \;\sim\; \lambda^* = \langle\, F,\, h\,\rangle$

в случае B:

templates: $F_\theta(t) \;=\; \mathcal{F}^{-1}(\,\mathcal{F}h_\theta(\nu)/\mathcal{E}(\nu))$,

matched filtering: $\lambda(\theta) \;=\; \langle\, F_\theta,\, f\,\rangle \;\longrightarrow\; \max \;\sim\; \lambda^*$, где

$$\lambda^* \;\equiv\; E(h) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\,\widehat{h}(\nu)\,|^2}{\mathcal{E}(\nu)}\,d\nu$$

– *относительная энергия полезного сигнала.*

(K. Thorne: *Gravitational Radiation*. In „300 Years of Gravitation“, Cambridge Univ. Press, (1987)).

2. *Wavelet transform based methods* (Innocent, J. M. and B. Torresani: *Wavelet transform and binary coalescence detection*. Preprint CPT 3363 (1996), проект VIRGO).

III. Метод квот (качественная детекция)

***Детекционный оператор* (*ДО*):**

$$\boldsymbol{\Psi(f;(x,y)) \;=\; \frac{1}{\sqrt{y-x}} \int_x^y \frac{\widehat{f}(\nu)}{\sqrt{\mathcal{E}(\nu)}}\, d\nu\,,\;\; y > x \geq 0\,.}$$

1. $\boldsymbol{P\left\{\,|\,\Psi(n;(x,y))\,|\;>\;\lambda\;\right\} \;=\; 1 - \Phi_0(\lambda)}\,;$
2. $\boldsymbol{\Psi : L_2(\mathcal{E}) \;\longrightarrow\; C(\mathbb{R}^2_{(>)})\,,\;\; \|\,\Psi\,\| \;=\; 1\,,}$

$$\|\,g\,\|_{L_2(\mathcal{E})} \;=\; \Big(\int_{\mathbb{R}} |\,\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g(\cdot)/\sqrt{\mathcal{E}(\cdot)}))(t)\,|^2\,dt\Big)^{1/2} \;=\; \sqrt{E(g)}\,,$$

$$\|\,g\,\|_{C(\mathbb{R}^2_{(>)})} \;=\; \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{(>)}} |\,g(x,y)\,|\,,\;\; \mathbb{R}^2_{(>)} \;=\; \{y > x \geq 0\}\,.$$

***Основная идея*:**

наличие $h \not\equiv 0$ нарушает закон распределения элементов спектральной меры шума (свойство 3.), а

$$P \to \frac{\mu\left\{\,(x,y)\;\in\;\Omega:\;|\,\Psi(n;(x,y))\,|\;>\;\lambda\,\right\}}{\mu(\Omega)}\,,\;\; \Omega\subset\mathbb{R}^2_{(>)}\,,$$

(вероятность $\to$ квота), так как данные содержат реализации независимых случайных величин (свойство 4.).

Принципы выбора $\boldsymbol{\Omega}$**:**

1. Интервалы, соответствующие разным точкам Ω, не пересекаются $\longrightarrow$ независимость значений детекционного оператора (свойство 4. шума):

$$\Omega_{(x_0)}(k\delta) = \{(\,mk\delta + x_0, (m+1)k\delta + x_0\,),\ m = 0, 1, \ldots\},\ k \in \mathbb{N}\,.$$

2. Длина интервала $k\delta$ не может быть слишком малой (тогда $\Psi \to 0$), но и не может быть слишком большой (тогда мало количество независимых значений оператора Ψ) $\longrightarrow$ усреднение по k:

$$\Omega_{\delta,(x_0)} = \bigcup_k \Omega(k\delta)\,.$$

Условие детектируемости (по методу квот) и принципы выбора $\boldsymbol{\lambda}$**:**

1. Если $\sqrt{E(h)} > \gamma_*$, $\Phi_0(\gamma_*/2) = 1/4$ $(\boldsymbol{\gamma_* \approx 1.35})$, то существует λ, такое, что $P\left\{\,|\,\Psi(f;(x,y))\,| > \lambda\,\right\} > 1 - \Phi_0(\lambda)$ (т. е, сигнал детектируем); для теоретически расчитанной гравитационной волны $\sqrt{E(h)} \approx 70$.

2. Выбор $\lambda = \sqrt{E(h)}/2$ является оптимальным.

3. $\gamma_* < \gamma \le \sqrt{E(h)} \longrightarrow \lambda = \gamma/2 \longrightarrow \lambda_*$ (экспериментально оптимальный параметр) $\longrightarrow$ $(2\lambda_*)^2$ – экспериментальная оценка энергии полезного сигнала.

[1] K. Runovski: *The general approach to the gravitational waves detection problem.* Jenaer Schriften für Math. und Inf. FSU Jena. Math/Inf/17/06. 2006.

[2] K. Runovski: *On detection of gravitational waves signals from inspiralling binaries.* Jenaer Schriften für Math. und Inf. FSU Jena. Math/Inf/18/06. 2006.

IV. Компьютерная симуляция

***Модель шума*:**

$$\widetilde{n}(\nu) \,=\, \frac{\widehat{n}(\nu)}{\sqrt{\mathcal{E}(\nu)}}\,.$$

$$[0,\nu^*] \,=\, \bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i\,,\; \Delta_i = [\nu_{i-1},\nu_i]\,,\; |\,\Delta_i\,| = \Delta\nu_i = \tau\,,\; \nu_N = \nu^*\,.$$

$$W(\Delta_i) \,\approx\, p(\nu_i)\,\Delta\nu_i\,,\; i = 1,\ldots,N$$

где $p(\nu_i)$ независимы и нормально распределены. Так как

$$E(W(\Delta_i)) = 0\,,\; \mathcal{D}(W(\Delta_i)) = |\,\Delta_i| = \tau\,,$$

то

$$E(p(\nu_i)) = 0\,,\; \mathcal{D}(p(\nu_i)) = |\,\Delta_i\,|^{-2}\,\mathcal{D}(W(\Delta_i)) = |\,\Delta_i|^{-1} = \tau^{-1}\,.$$

Таким образом, $\widetilde{n}(\nu) = p_i$, $i = 1,\ldots,N$, где p_i независимы и $(0,\tau^{-1})$-нормально распределены. В эксперименте: $\nu^* = 16$, $\tau = 1/16$, $N = 256$.

***Полезный сигнал*:**

$\widetilde{h}(\nu)$ – „ступенька“ от 4 до 9 высоты $1,5$, $E(h) = 11.25$. Результаты компьютерного эксперимента: $\lambda_* = 1.7$, $E(h) \approx (2\lambda_*)^2 = 11.56$.

***Области* $\boldsymbol{\Omega_j}$:**

$\Delta(x,y)$ – треугольник с вершинами (x,x), (x,y), (y,y).

$$\Omega_j \,=\, \Delta(4, 7 + j/4) \cap \Omega_{1/4,(4)}\,,\; j = 1,\ldots,20\,.$$

***Темы текущих дипломных работ*:**

[1] Экспериментальное определение пороговой относительной энергии полезного сигнала.
[2] Оптимизация распределения энергии полезного сигнала по частному спектру в зависимости от спектральной плотности шума.

V. Количественная детекция

***Основная идея* (*дальнейшая „продажа“ независимости за уменьшение дисперсии шумовой компоненты*“) :**

все элементы спектральной меры $\widetilde{n}$ независимы, а их дисперсия бесконечна; при действии ДО дисперсия уменьшается до 1, но независимыми остаются лишь те $\Psi(n,(x,x+\delta))$, которые соответствуют точкам $\mathbb{R}^2_{(>)}$, расположенным на расстоянии $\sqrt{2}\delta$ друг от друга (свойство 4. шума); эта оставшаяся независимость может быть использована для построения статистики для дисперсии преобразованной шумовой компоненты в целях дальнейшего ее уменьшения.

Оператор „сдувания“ шума:

$\Omega = [\nu', \nu"] \subset (0, +\infty)$, $0 < \gamma < 1$, $\nu' - (\gamma|\,\Omega\,|)/2 > 0$,

для $0 < \delta \leq \gamma|\,\Omega\,|$ обозначим $\Omega_\delta = [\nu' - \delta/2, \nu" + \delta/2]$

$I_\delta(x) = [x - \delta/2, x + \delta/2]$, $x \in \Omega$.

$$\boldsymbol{U_w(f;\delta) \;=\; \langle\, f, f\,\rangle_w(\delta) -\; \delta\,(\overline{w}(\delta))^2\,,}$$

$$\boldsymbol{\langle\, f, g\,\rangle_w(\delta) \;=\; |\,\Omega\,|^{-1} \int\limits_{\Omega} \Psi_w(f; I_\delta(x))\; \Psi_w(g; I_\delta(x))}$$

$$\boldsymbol{\|\, w\,\|^2_{L_2(I_\delta(x))}\, dx\;,}$$

$$\boldsymbol{\overline{w}(\delta) \;=\; (\delta|\,\Omega\,|)^{-1/2}\, \|\, \|\, w\,\|_{L_2(I_\delta(x))} \|_{L_2(\Omega)}\;,}$$

$$\boldsymbol{\Psi_w(f; I) \;=\; \|\, w\,\|^{-1}_{L_2(I)} \int\limits_{I} \frac{\widehat{f}(\nu)}{\sqrt{\mathcal{E}(\nu)}}\, w(\nu)\, d\nu\,.}$$

$$\boldsymbol{U_w(f;\delta) \;=\; \langle\, h, h\,\rangle_w(\delta) \;+\; 2\,\langle\, h, n\,\rangle_w(\delta) +}$$

$$\boldsymbol{\big(\,\langle\, n, n\,\rangle_w(\delta) \;-\; \delta\,(\overline{w}(\delta))^2\big)\,.}$$

Для полезного сигнала вида

$$\widetilde{h}(\nu) \equiv \frac{\widehat{h}(\nu)}{\sqrt{\mathcal{E}(\nu)}} = \frac{a}{w(\nu)} \cos(T\nu + \varphi) \ :$$

$$\mathbf{1.} \quad \langle h, h \rangle_w(\delta) = \frac{2a^2}{T^2} \sin^2 \frac{T\delta}{2} \Big(1 + \frac{\sin T|\Omega|}{T|\Omega|} \cos(T(\xi' + \xi'') + 2\varphi) \Big) \,;$$

$$\mathbf{2.} \quad \sigma\big(\langle h, n \rangle_w(\delta)\big) \le C_1(\gamma) \, \frac{a\delta}{T} \Big| \sin \frac{T\delta}{2} \Big| \,,$$

$$C_1(\gamma) = 2 \, \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \max_{0 \le \tau \le \gamma |\Omega|} |\Omega_\tau|^{-1} \, \|w\|_{L_2(\Omega_\tau)} \,;$$

$$\mathbf{3.} \quad \sigma\big(\langle n, n \rangle_w(\delta)\big) \le C_2(\gamma) \, \delta^{3/2} \,,$$

$$C_2(\gamma) = \sqrt{2} \, \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \max_{0 \le \tau \le \gamma |\Omega|} |\Omega_\tau|^{-1} \, \|w\|^2_{L_4(\Omega_\tau)} \,.$$