О задаче синтеза группового управления движением в условиях препятствий

А. Б. Куржанский

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Общероссийский семинар “Информатика, управление и системный анализ”
29-го сентября 2015 г.

Мотивации для математических задач группового управления

1. Тушение пожаров
   (особенно в гористой местности)
2. Транспортные задачи: Перегрузки на автострадах
   Группы автомобилей без водителей
3. Задачи экономики
4. Изучение космического пространства
   Обследование пояса астероидов
5. Группы роботов
   Борьба с авариями на атомных элетростанциях
6. Подводная навигация
   Поиск и обследование потонувших кораблей

Основная задача: Групповой синтез управлений (по принципу обратной связи)

Группа (стая, команда)

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, u), \quad x \in \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad u \in \mathbb{R}^{p\times m},$$

$$f(t, x, \dot{x}, u), = \{f(t, x^{(1)}, \dot{x}^{(1)}, u^{(1)}), \dots, f(t, x^{(m)}, \dot{x}^{(m)}, u^{(m)})\}$$

$$x = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\}, \;\; u = \{u^{(1)}, \dots, u^{(m)}\},$$

$$\mathbf{x}^{(j)'} = \{x^{(j)}, \dot{x}^{(j)}\}' \in \mathbb{R}^{2n}, \;\; \mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}\},$$

$$j = \{1, \dots, m\}$$

Стая в матричной форме

Обозначим

$$\ddot{x}^{(j)} = f(t, \mathbf{x}^{(j)}, u) = A(t)x^{(j)} + C(t)\dot{x}^{(j)} + B(t)u^{(j)},$$

$$F(t)\mathbf{X} = \{F(t)\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, F(t)\mathbf{x}^{(m)}\}, \; \mathbf{B}_v(t,u) = \{B(t)u^{(1)}, \ldots, B(t)u^{(m)}\},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} \mathscr{O} & I \\ A(t) & C(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}(t,u) = \begin{pmatrix} \mathscr{O} \\ \mathbf{B}_v(t,u) \end{pmatrix}.$$

Основное уравнение **в матричной форме**:

$$\dot{\mathbf{X}} = F(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t,u). \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2n\times m}, \quad u \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

Стая в векторной форме (обозначения)

Вытягивание матрицы в вектор и горизонтального набора матриц в вертикальный набор

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^{(i)} \otimes (A\mathbf{e}^{(i)}),$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{I}_{m\times m}^{n\times n}(i) \otimes \mathbf{B}_v \mathbf{I}_{m\times m}^{p\times p}(i)$$

Здесь $\mathbf{I}_{m\times m}^{n\times n}(i)$ - $m \times m$ блочная матрица с $n \times n$ блоками из единичных матриц.
Также обозначим

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}, \quad \overline{F(t)\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{(F(t)\mathbf{X}_s)} \\ \overline{(F(t)\mathbf{X}_v)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \bar{u}.$$

Стая в векторной форме (уравнения)

Обозначим

$$d\mathbf{x}^{(j)}(t)/dt = \begin{pmatrix} \mathscr{O} & I \\ A(t) & C(t) \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(j)} + \begin{pmatrix} \mathscr{O} \\ B(t) \end{pmatrix} \mathbf{u}^{(j)}$$

$$j = 1, \ldots, m$$

Основное уравнение **в векторной форме** имеет вид

$$d\mathbf{x}/dt = \begin{pmatrix} \overline{(F(t)\mathbf{X}_s)} \\ \overline{(F(t)\mathbf{X}_v)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathscr{O} \\ \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{t})\mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Ограничения на управления

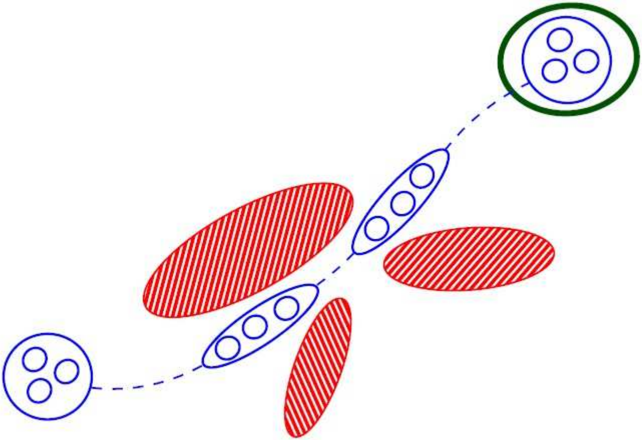
Для каждой изолированной системы

$$u^{(j)} \in \mathscr{P} = -\mathscr{P}, \qquad 0 \in \operatorname{int}\mathscr{P},$$

$\mathscr{P}$ — выпуклый компакт.

Каждая система является вполне управляемой.
Достижение состояния $x \in \mathbb{R}^n$ за конечное время.
Обеспечение постоянной скорости $\dot{x}^{(j)}(t) = const > 0$.

Групповое движение (определение)



Группа (команда) - определение

Член группы $x^{(j)}$ определяется как **шар** с **радиусом** r (зона безопасности) вокруг **центра** $x^{(j)}$

$$\mathscr{B}_r(x^{(j)}) = \mathscr{B}_r(0) + x^{(j)},$$

$$\mathscr{B}_r(q^0) = \{q : \langle q - q^0, q - q^0\rangle \leq r^2\}.$$

Для избежания столкновений вводим понятие **расстояния между матрицами**

$$D[t] = \{d_{i,j}[t]\},\ d_{i,j}[t] = \|x^{(j)}(t) - x^{(i)}(t)\|^2,$$

$$\mathbf{D}_r[t] = \{D_{i,j}[t]\},\ D_{i,j}[t] = D(\mathscr{B}_r(x^{(j)}(t)), \mathscr{B}_r(x^{(i)}(t))).$$

Расстояние между выпуклыми компактами $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$

$$D(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2) = \min\{\|z^* - z^{**}\| \mid z^* \in \mathscr{X}_1, z^{**} \in \mathscr{X}_2\}.$$

Определение свойства стаи (группы, команды)

Свойство (i) - Избежание столкновений (внутренние фазовые ограничения)

$$D(\mathscr{B}_r(x^{(j)}(t)), \mathscr{B}_r(x^{(i)}(t))) \geq 0, \quad j \neq i, \ j, i = 1, \dots, m.$$

$$D_{i,j}[t] = D(\mathscr{B}_r(x^{(j)}(t)), \mathscr{B}_r(x^{(i)}(t))) = \max\{0, \|x^{(i)}(t) - x^{(j)}(t)\| - 2r\}$$

Свойство (ii) - Близость членов стаи (друг к другу, попарная) (внешнее фазовое ограничение)

$$\mathscr{B}_r(x^{(j)}(t)) \subset \mathscr{Q}(t), \quad \forall j = 1, \dots, m$$

$\mathscr{Q}(t)$ есть виртуальный контейнер для стаи $\mathbf{X}$.

Проблема целевого группового управления (ЦГУ)

1. Перевести групповую систему (стаю) во множество $\mathscr{M}$:

$$\mathbf{X}[t_0] \;\Rightarrow\; \mathbf{X}[\vartheta] \subseteq \mathscr{M} + \varepsilon\mathscr{B}_1(0).$$

2. Обеспечить не столкновение членов стаи с радиусом безопасности r:

$$D(\mathscr{B}_r(x^{(j)}(t)), \mathscr{B}_r(x^{(i)}(t))) \geq 0, \;\; j \neq i, \; j, i = 1, \ldots, m.$$

3. Обеспечить близость членов стаи:

$$\mathscr{B}_r(x^{(j)}(t)) \subset \mathscr{Q}(t), \;\; \forall j = 1, \ldots, m.$$

4. Обеспечить не столкновение стаи с внешними препятствиями $\mathbf{E}_k$:

$$\mathscr{Q}(t) \cap \mathbf{E}_k, = \emptyset, \;\; k = 1, \ldots, k_o, \;\; t \in [t_0, \vartheta].$$

Виртуальные контейнеры

Эллипсоид

$$\mathscr{E}(q(t), Q(t)) = \{x : \langle x - q, Q^{-1}(t)(x - q(t))\rangle \leq 1\}$$

с центром $q(t)$ и матрицей конфигураций $Q(t) = Q'(t) > 0$

Прямоугольный параллелотоп (Коробка)

$$\mathscr{P}(p, P, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = p + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i, \},$$

с ортогональной матрицей конфигураций P и центром $p \in \mathbb{R}^n$, $\pi \in \mathbb{R}^n_+$

Здесь $p_i = \mathbf{e}_i$ - ортогональные единичные орты, столбцы матрицы P, $|\alpha_i| \geq 0$ - полурасстояния рёбер вдоль направлений p_i.

Эллипсоид, описанный вокруг коробки

Для **коробки** $\mathscr{P}(p, P, \alpha)$:
рассмотрим диагональную матрицу $\mathbf{I}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с элементами $\lambda_i^0 = n\alpha_i^2 > 0$

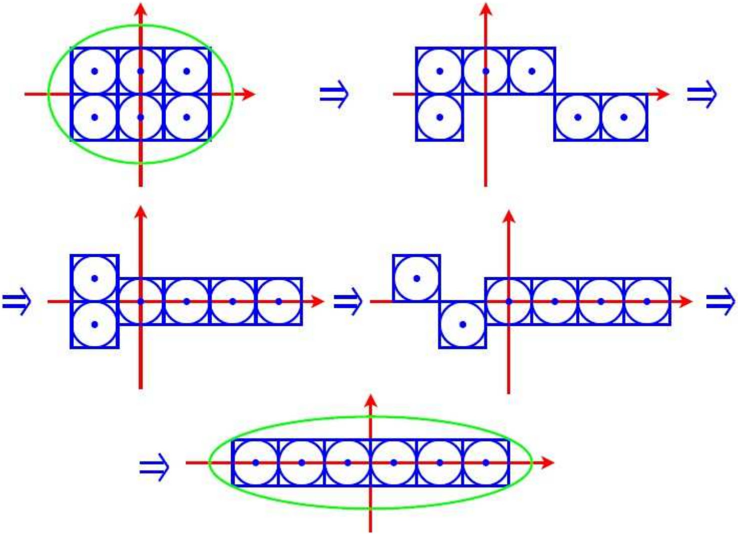
Определим $Q_P = P\,\mathbf{I}(\alpha)P',\;\; q_p = p$. Тогда

$$\mathscr{P}(p, P, \alpha) \subseteq \mathscr{E}(q_p, Q_P).$$

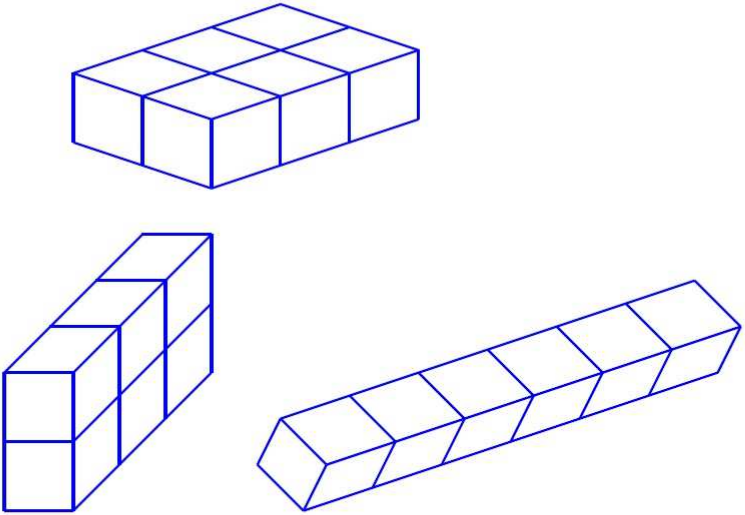
Взаимность:

Задана - коробка $\mathscr{P}(p, P, \alpha)$. Тогда $\mathrm{Vol}\mathscr{E}(q_p, Q_P) =$ **min**
Дан - эллипсоид $\mathscr{E}(q_p, Q_P)$. Тогда $\mathrm{Vol}\mathscr{P}(p, P, \alpha) =$**max**

Реконфигурация стаи внутри контейнера (на плоскости)



Реконфигурация стаи внутри контейнера (в пространстве)



Уравнения движения эллипсоидального контейнера

Управляемые параметры: $q(t)$, $Q(t)$ (или $p(t)$, $\alpha(t)$)

Уравнение для центра $q(t)$

$$\ddot{q} = v, \;\; q(t_0) = q_0, \;\; \langle v, v \rangle \leq \mu^2.$$

Уравнение для матрицы конфигураций $Q(t)$

$$\dot{Q} = T(t)Q + QT(t) + V(t), \;\; Q(t_0) = Q_0, \;\; \operatorname{tr} V \leq \nu^2.$$

Внешние препятствия

Набор эллипсоидов - фиксированный $\mathbf{E}_i = \mathscr{E}(q_i, Q_i)$, либо подвижный $\mathbf{E}_i(t)$

Ограничения:

На ускорение (управление) v:

$$\langle \ddot{q}(t), \ddot{q}(t) \rangle \leq \mu^2,$$

На размерность контейнера $E_c[t]$
(зависит о размеров стаи)

Для **эллипсоида**:

$$k_{e-}^2 \leq \mathrm{Vol}(\mathscr{E}(q(t), Q(t))) \leq k_{e+}^2,$$

Для **коробки**:

$$k_{p-}^2 \leq \mathrm{Vol}(\mathscr{P}(P(t), p(t), \alpha(t)) \leq k_{p+}^2$$

$\mathrm{Vol}\mathscr{P} n^{1/2} = \mathrm{Vol}\mathscr{E}$

Некоторые математические задачи группового целевого управления

Рассмотрены отдельно

* Управление эллипсоидальными трубками - динамикой и конфигурациями

* Сбор в группу (стаю, формацию)

В данном докладе

1. **Групповое движение внутри эллипсоидальной трубки, совершающей движение среди препятствий**
   Координация движений контейнера и стаи, находящейся внутри.
   Изучение возможных типов формаций
2. **Принцип оптимальности для группового управления**
   Понятие Обобщённой Позиции системы

Текущие исследования

* Задачи в области коммуникаций и вычислительные процессы.

Движение стаи внутри контейнера. Общая схема

(I) **Разместить стаю в Коробке минимального объёма:**

$$\mathbf{X}[t] \subset \mathscr{P}(p(t), P(t), \alpha(t))$$

(II) **Поместить заданную Коробку в Эллипсоид наименьшего объёма**

$$\mathscr{P}(p(t), P(t), \alpha(t)) \subset E_c[t] = \mathscr{E}(q_c(t), Q_c(t))$$

(III) **Соблюдать соотношения**

$$\mathscr{E}(q(t), Q_c(t)) = q_c(t) + \mathscr{E}(0, Q_c(t)),$$

$$\mathscr{P}(p(t), P(t), \alpha(t)) = p(t) + \mathscr{P}(0, P(t), \alpha(t)),$$

$$\mathbf{X}[t] = x[t] + \mathbf{X}_{cq}[t], \quad q_c(t) = p(t) = x(t).$$

Терминальное управление эллипсоидальными трубками

Система

$$\ddot{q} = v, \;\; q(t_0) = q_0, \;\; t \in [t_0, \vartheta],$$

$$\dot{Q} = T(t)Q + QT(t) + B(t)V(t)B'(t), \;\; Q(t_0) = Q_0.$$

Ограничения на управления

$$[T(t), T(t)] + [V(t), V(t)] \leq \kappa_Q^2, \;\; \langle v(t), v(t) \rangle)dt \leq \kappa_q^2.$$

Целевое множество

$$\mathscr{M}_\varepsilon = \mathscr{E}(m, M(1+\varepsilon)^2), \;\; M = M' > 0.$$

Задача УЭ: найти управления V, v, обеспечивающие

$$(i)\; E_c[\vartheta] = \mathscr{E}(q(\vartheta, Q(\vartheta)) \subseteq \mathscr{M}_\varepsilon, \;\; (ii)\; \varepsilon^2 = \min.$$

Контейнер - два отдельных уравнения типа Гамильтона-Якоби

Для центра $q(t)$:

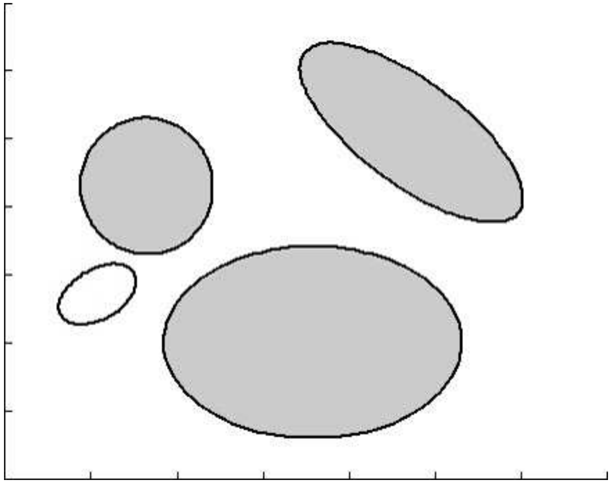
$$\partial V^{(q)}/\partial t + \min_{v}\{\langle \partial V^{(q)}/\partial \mathbf{q}, d\mathbf{q}/dt\rangle\} = 0,$$

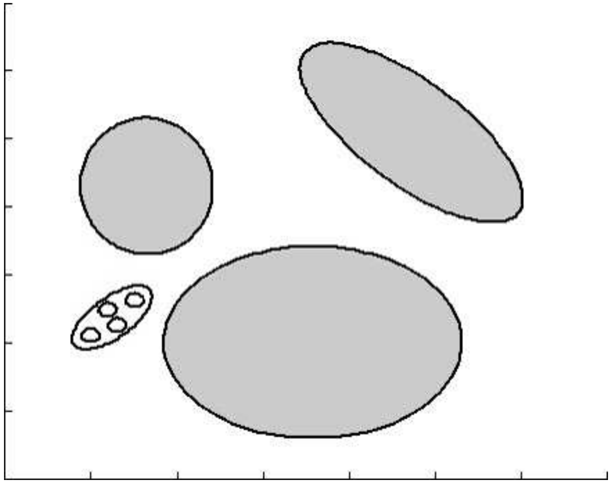
$$V^{(q)}(\vartheta, \mathbf{q}) = \|q(\vartheta) - m\|^2 + \sigma^2\|\dot{q}(\vartheta)\|^2.$$

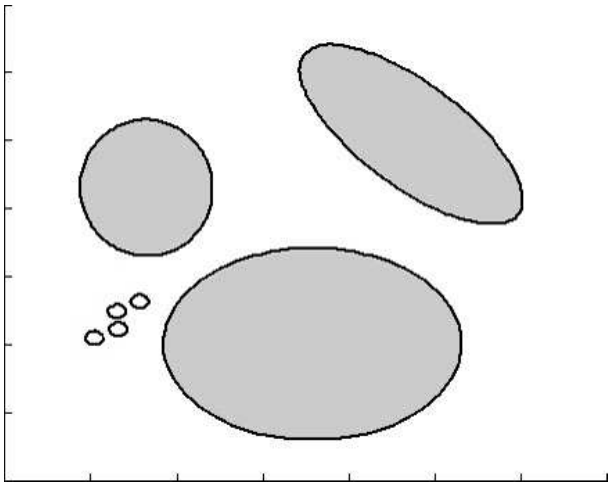
Для матрицы конфигурации $Q(t)$:

$$\partial \mathbf{V}^c/\partial t + \min_{V,T}\{\langle \partial \mathbf{V}^c/\partial Q, T(t)Q + QT(t) + B(t)VB'(t)\rangle\} = 0,$$

$$\mathbf{V}(\vartheta, Q) = [Q_c[\vartheta] - M, Q_c[\vartheta] - M] = \|Q_c[\vartheta] - M\|^2.$$







Контейнер - условия координации

Совместная функция цены : $V_E(t_0, Q) =$

$$\min_{T,V,v}\{[Q_c[\vartheta] - M, Q_c[\vartheta] - M] + \langle q_c(\vartheta) - m, q_c(\vartheta) - m\rangle\}.$$

Совместное фазовое ограничение

$$D^2(\mathscr{E}(q^{(k)}, Q((k)), \mathscr{E}(q_c(\vartheta), Q_c(t))) \geq 0, \quad k = 1, \ldots, k_o.$$

В пределах промежутка $t \in [t_s^-, t_s^+]$ между барьерными гиперплоскостями

$$\mathscr{H}_b^- = \{q : \langle q, h_b\rangle = c_b^-\}, \mathscr{H}_b^+ = \{q : \langle q, h_b\rangle = c_b^+\}, \; c_b^- < c_b^+.$$

Вне этих гиперплоскостей имеем $D(E_c[t], \mathbf{E}_k) > 0, \; k = 1, 2, 3.$

Внутри виртуального контейнера. Учёт фазовых ограничений

Обозначим: $h_+[t] = h(t)$, если $h(t) \geq 0$; $h_+(t) = 0$, если $h(t) < 0$.

Доп. члены в уравнении ГЯБ для задачи ГЦУ

Для внешнего выпуклого фазового ограничения:

$$h^+_{jq}[t] = h^2_+(\mathscr{B}_r(x^{(j)}(t)), \mathscr{E}(q_c(t), Q_c(t)))_+ + (\|\dot{x}^{(j)}(t) - \dot{q}(t)\|^2 - \delta^2)_+$$

Для избежания столкновений (нахождение вне выпуклого множества)

$$h_{ij}[t] = h^+(4r^2 - \|x^{(i)}(t) - x^{(j)}(t)\|^2)_+, \quad i > j; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

$$H_{1+}(t, \mathbf{x}, q) = \sum_{j=1}^{m} h^+_{jq}[t], \; H_{2+}(t, \mathbf{x}, q) = \sum_{i>j=1}^{m} h^+_{ij}[t],$$

- $H_+(t, \mathbf{x}, q) = H_{1+}(t, \mathbf{x}, q) + H_{2+}(t, \mathbf{x}, q)$.

Групповое движение внутри виртуального контейнера $E_c[t]$

Внешнее ограничение:

$$\mathscr{B}_r^{(i)}[t] = \mathscr{B}_r(x^{(i)}(t)) \subseteq E_c[t] = \mathscr{E}(q(t), Q(t)),$$

$$h_+(\mathscr{B}_r^{(i)}[t], E_c[t]) = D_{ci}[t] \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, m.$$

Внутренние ограничения - **избежание столкновений**:
$X(t) = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\}$

Матрица расстояний

$$D_{ij}[t] = D(\mathscr{B}_r^{(i)}[t], \mathscr{B}_r^{(j)}[t]) = D_{ji}^r[t], \quad i \neq j, \;\; i, j = 1. \ldots, m; \quad d_{ii}^r[t] \equiv 0.$$

Условия для внутренних нестолкновений:

$$\mathbf{D} = \{D_{ij}^r\}, \quad D_{ij}^r[t] \geq 2r, \;\; i \neq j, \;\; (\mathbf{D}[t] + 2rI \geq 2rI)$$

Обеспечение нестолкновений - управления

Управления, обеспечивающие внешние выпуклые фазовые ограничения $x^{(i)}(t) \in E_c[t]$:

$$U_E^{(i)}(t) = \begin{cases} \arg\min \left\{ p : dD_{ci}(t,x)/dt \,|_u \;\middle|\; u \in \mathscr{P}(t) \right\} \leq 0 \\ \mathscr{P}(t), \text{иначе.} \end{cases}$$

Управления, обеспечивающие внутренние нестолкновения (невыпуклые ограничения):

$$U_{ji}(t) = U_{ij}(t) = \begin{cases} \arg\min \left\{ p : dD^r_{ij}(t,x)/dt \,|_u \;\middle|\; u \in \mathscr{P}(t) \right\} \geq 0 \\ \mathscr{P}(t), \text{иначе.} \end{cases}$$

Суммарное (полное) управление

$$\mathscr{U}_{tot}^{(i)}(t,x) \in \{\mathscr{P}^{(i)}(t) \bigcap U_E^{(i)}(t) \bigcap_{j<i} U_{ij}(t),\ \ i,j = 1,\dots,m\}$$

Стая внутри контейнера

Задача группового управления разрешима в том и только том случае, когда $\mathscr{U}^{(i)}_{tot}(t, x) \neq \emptyset, \forall i$

Индивидуальные стратегии членов стаи, уклоняющихся от двух препятствий, приведены для трёх интервалов

(I) $t \in [t_0, t_s^-]$ - перед первым барьером $\mathscr{H}_b^-$

(II) $t \in [t_s^-, t_s^+]$ - уклонение от препятствий между барьерами

(III) $t \in [t_s^+, \vartheta]$ - после второго барьера $\mathscr{H}_b^+$

достижение целевого множества $\mathscr{M}_\varepsilon$

Координация движений контейнера и стаи

Перед первым барьером:

Обозначения:

τ_- – первый момент, когда $x^{(1)}(t) \in \mathscr{H}_b^-$;

h – время прохождения каждым членом стаи расстояния r : $\|v_s\| h \geq r$;

τ^* – время на реконфигурацию $\mathbf{X}[t_0]$ в цепочку $\mathbf{X}_{ch}[t_0 + \tau^*]$.

Условия координации

$$(a)\ t_0 + \tau^* \leq \tau_- \quad (b)\ x^{(1)}(\tau_-) = q(\tau_-) \in \mathscr{H}_b^-$$

$$\text{тогда} \quad t_s^- = \tau_-$$

Определение цепочки

$$x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t + 2h) = \ldots = x^{(m)}(t + 2(m-1)h), \quad t \in [t_s^-, t_s^+]$$

Групповое управление (I)

Задача (I) (интервал $[t_0, \tau_-]$)
Терминальный функционал:
$\varphi(\tau_-, \mathbf{x}) = \|x^{(1)} - q_c(t)\|^2 + \|\dot{x}^{(1)}(\tau_-) - v_s\|^2$

Функция цены

$$\mathbf{V}^{(1)}(t_0, \mathbf{x}) = \min_u \{\varphi(\tau_-, \mathbf{x}(\tau_-)) + \int_{t_0}^{\tau_-} H_+(t, \mathbf{x}, q)dt \mid \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbf{P}\}$$

Уравнение ГЯБ с краевым условием

$$\partial\mathbf{V}/\partial t + \langle \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v\rangle + \langle \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v, A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v\rangle +$$

$$\min_{u \in \mathscr{P}} \{\langle \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}}\rangle\} + H_+(t, \mathbf{x}, q) = 0 \qquad (1)$$

$$\mathbf{V}(\tau_-, \mathbf{x}) = \varphi(\tau_-, \mathbf{x}).$$

Задача (II) (интервал $[\tau_-, \tau_+]$)

Терминальный функционал:
$\varphi_{ob}(\tau_+, \mathbf{x}) = \|x^{(m)}(\tau_+) - q_+^*\|^2 + \|\dot{x}^{(m)}(\tau_+) - v_s)\|^2$

Функция цены

$$\mathbf{V}^{(2)}(\tau_-, \mathbf{x}) =$$

$$\min_u\{\varphi(\tau_+, \mathbf{x}(\tau_+)) + \int_{\tau_-}^{\tau_+} (H_+(t, \mathbf{x}, q) + \mathbf{H}(t, \mathbf{x}, q))dt \mid \mathbf{x}(\tau_-) = \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbf{P}\}$$

Уравнение ГЯБ с краевым условием

$$\partial \mathbf{V}/\partial t + \langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_v, A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v \rangle +$$

$$+ \min_{u \in \mathscr{P}}\{\langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}} \rangle\} + H_+(t, \mathbf{x}, q) + \mathbf{H}(t, \mathbf{x}, q) = 0 \qquad (2)$$

$$\mathbf{V}(\tau_+, \mathbf{x}) = \varphi_{ob}(\tau_+, \mathbf{x}).$$

Групповое управление (III)

Задача (III) (интервал $[t_+, \vartheta]$)

Терминальный функционал:
$\varphi_f(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) = \|\mathbf{x}_{sc}(\vartheta) - \mathbf{x}_{sc}(t_0)\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{x}_v^{(j)}(\vartheta) - \dot{q}_{cf}(\vartheta)\|^2$

Функция цены

$$\mathbf{V}^{(3)}(\tau_+, \mathbf{x}) = \min_u \{\varphi_f(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) + \int_{\tau_+}^{\vartheta} H_+(t, \mathbf{x}, q) dt \mid \mathbf{x}(\tau_+) = \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbf{P}\}$$

Уравнение ГЯБ с краевым условием

$$\partial \mathbf{V}/\partial t + \langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v \rangle \langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_v, A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v \rangle +$$

$$+ \min_{u \in \mathscr{P}} \{\langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}} \rangle\} + H_+(t, \mathbf{x}, q) = 0, \qquad (3)$$

$$\mathbf{V}(\vartheta, \mathbf{x}) = \varphi_f(\vartheta, \mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}_{cs}(t_0) = m - q_{cf}(\vartheta))$$

Разрешимость задач I, II, III

При условии

$$\mathscr{U}_{tot}(t) \neq \emptyset, \qquad t \in [t_0, \vartheta]$$

Каждая из задач (I), (II), (III) разрешима **ЕСЛИ**

$$\mathbf{V}^{(1)}(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{V}^{(2)}(\tau_-, \mathbf{x}(\tau_-)) = \mathbf{V}^{(3)}(\tau_+, \mathbf{x}(\tau_+)) = 0$$

Разрешимость задачи ГЦУ

При условии

$$\mathscr{U}_{tot}(t) \neq \emptyset, \qquad t \in [t_0, \vartheta]$$

Задача **ГЦУ** разрешима для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{V}^{(1)}(t_0, \mathbf{x} \mid \mathbf{V}^{(2)}(\tau_-, \cdot \mid \mathbf{V}^{(3)}(\tau_+, \cdot \mid \vartheta, \varphi_f(\varphi, \cdot)) = 0.$$

Множество

$$\mathscr{W}[t_0] = \{\mathbf{x} : \mathbf{V}^{(1)}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{V}(t_0, \mathbf{x} \mid \vartheta, \varphi_f(\vartheta, \cdot)) = 0\}$$

есть совокупность всех состояний $\{t_0, \mathbf{X}\}$, для которых задача ГЦУ разрешима.

Принцип Оптимальности. Множества Разрешимости для Группового Управления

Принцип оптимальности: аналогия для управления стаей

$$\mathbf{V}(t_0, \mathbf{x} \mid \vartheta, \varphi_f(\vartheta, \cdot)) = \mathbf{V}(t_0, \mathbf{x} \mid \tau_-, \mathbf{V}(\tau_-, \cdot \mid \tau_+, \mathbf{V}(\tau_+, \cdot \mid \vartheta, \varphi_f(\vartheta, \cdot))$$

Множество разрешимости (попятной достижимости) для групповой динамики

$$\mathbf{W}(t, \mathbf{X}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{V}(t_0, \mathbf{x} \mid \vartheta, \varphi_f(\vartheta, \cdot)) = 0\}$$

Рассмотрим

$t \in [t_0, \vartheta], \quad \lambda = \max\{\lambda_i(t) \mid i = 1, \ldots, n\}, \ , \|A(t)\| \leq \nu$

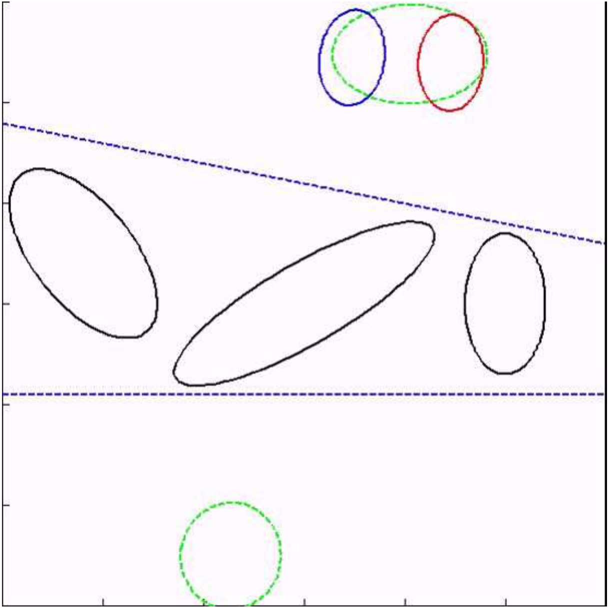
и введём функцию

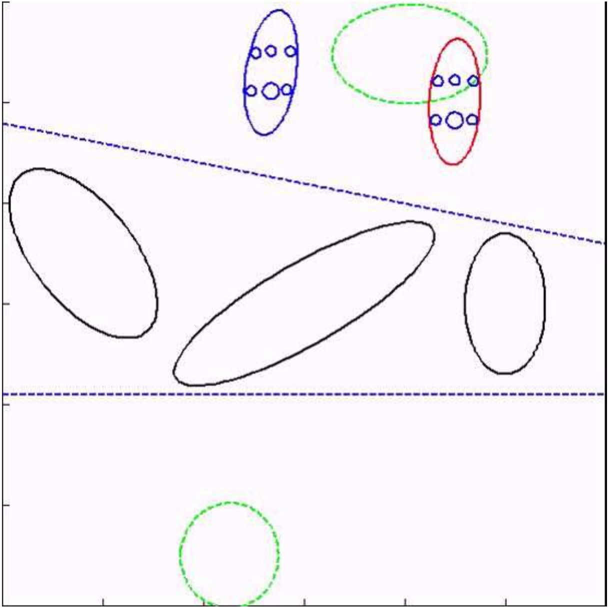
$$\mathscr{V}(t, \mathbf{X}) = \exp(-2r\gamma t) h_+^2(\mathbf{X}[t], \mathbf{W}[t]), \quad \gamma \geq \max\{\lambda, \nu\}.$$

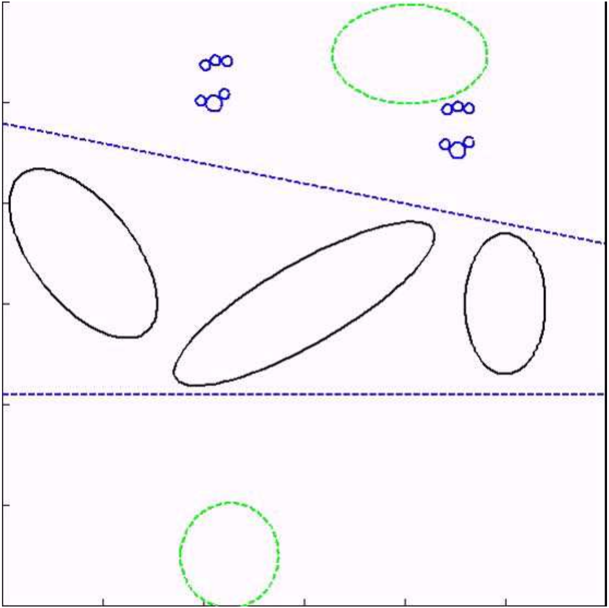
Стратегии управления

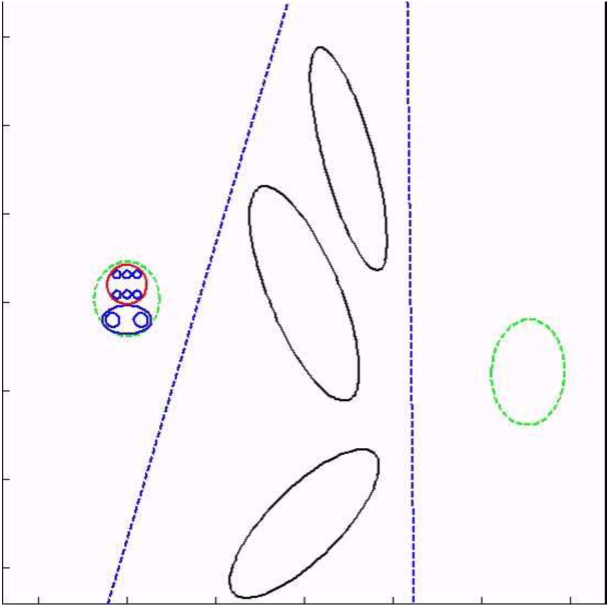
$$\underline{u}^{(j)}(t, \mathbf{x}) \in \arg\min \sum_{j=1}^{m} \{\langle \partial \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) / \partial x_v^{(j)}, B(t) u^{(j)} \rangle \mid u^{(j)} \in \mathscr{P}\}.$$

$$j = \{1, \ldots, m\}$$









Л. Больцман – (1844 - 1906) – Венский университет

Единство природы проявляется

в потрясающей аналогии дифференциальных уравнений,

относящихся к различным областям человеческих знаний.

Спасибо за внимание!